

VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS

Liudas LIEPA

MELANO PRISITAIKOMUMO TEOREMOS INTERPRETACIJA OPTIMIZUOJANT RĖMINES KONSTRUKCIJAS

DAKTARO DISERTACIJA

TECHNOLOGIJOS MOKSLAI,
STATYBOS INŽINERIJA (02T)



LEIDYKLA
Vilnius TECHNIKA 2017

Disertacija rengta 2012–2017 metais Vilniaus Gedimino technikos universitete.

Vadovas

prof. habil. dr. Juozas ATKOČIŪNAS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, statybos inžinerija – 02T).

Vilniaus Gedimino technikos universiteto Statybos inžinerijos mokslo krypties disertacijos gynimo taryba:

Pirmininkas

prof. habil. dr. Gintaris KAKLAUSKAS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, statybos inžinerija – 02T).

Nariai:

prof. habil. dr. Rimantas BARAUSKAS (Kauno technologijos universitetas, mechanikos inžinerija – 09T),

prof. dr. Algirdas JUOZAPAITIS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, statybos inžinerija – 02T),

prof. dr. Zdenek KALA (Brno technologijos universitetas, Čekija, statybos inžinerija – 02T),

prof. dr. Arnoldas NORKUS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, statybos inžinerija – 02T).

Disertacija bus ginama viešame Statybos inžinerijos mokslo krypties disertacijos gynimo tarybos posėdyje **2017 m. kovo 17 d. 9 val.** Vilniaus Gedimino technikos universiteto senato posėdžių salėje.

Adresas: Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva.

Tel.: (8 5) 274 4956; faksas (8 5) 270 0112; el. paštas doktor@vgtu.lt

Pranešimai apie numatomą ginti disertaciją išsiųsti **2017 m. vasario 15 d.**

Disertaciją galima peržiūrėti VGTU talpykloje <http://dspace.vgtu.lt> ir Vilniaus Gedimino technikos universiteto bibliotekoje (Saulėtekio al. 14, LT-10223 Vilnius, Lietuva).

VGTU leidyklos TECHNIKA 2017-009-M mokslo literatūros knyga
<http://leidykla.vgtu.lt>

ISBN 978-609-476-007-5

© VGTU leidykla TECHNIKA, 2017

© Liudas Liepa, 2017

liudas.liepa@vgtu.lt

VILNIUS GEDIMINAS TECHNICAL UNIVERSITY

Liudas LIEPA

MELAN SHAKEDOWN THEOREM INTERPRETATION FOR OPTIMIZATION OF FRAMED STRUCTURES

DOCTORAL DISSERTATION

TECHNOLOGICAL SCIENCES,
CIVIL ENGINEERING (02T)



LEIDYKLA

Vilnius TECHNIKA 2017

Doctoral dissertation was prepared at Vilnius Gediminas Technical University in 2012–2017.

Supervisor

Prof. Dr Habil. Juozas ATKOČIŪNAS (Vilnius Gediminas Technical University, Civil Engineering – 02T).

The Dissertation Defense Council of Scientific Field of Civil Engineering of Vilnius Gediminas Technical University:

Chairman

Prof. Dr Habil. Gintaris KAKLAUSKAS (Vilnius Gediminas Technical University, Civil Engineering – 02T).

Members:

Prof. Dr Habil. Rimantas BARAUSKAS (Kaunas University of Technology, Mechanical Engineering – 09T),

Prof. Dr Algirdas JUOZAPAITIS (Vilnius Gediminas Technical University, Civil Engineering – 02T),

Prof. Dr Zdenek KALA (Brno University of Technology, Czech Republic, Civil Engineering – 02T),

Prof. Dr Arnoldas NORKUS (Vilnius Gediminas Technical University, Civil Engineering – 02T).

The dissertation will be defended at the public meeting of the Dissertation Defense Council of Civil Engineering in the Senate Hall of Vilnius Gediminas Technical University at **9 a. m. on 17 March 2017**.

Address: Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lithuania.

Tel.: +370 5 274 4956; fax +370 5 270 0112; e-mail: doktor@vgtu.lt

A notification on the intend defending of the dissertation was sent on 15 February 2016.

A copy of the doctoral dissertation is available for review at VGTU repository <http://dspace.vgtu.lt> and at the Library of Vilnius Gediminas Technical University (Saulėtekio al. 14, LT-10223 Vilnius, Lithuania).

Reziumė

Disertacijoje nagrinėjamos žinomos geometrijos tamprios-plastinės rėminės konstrukcijos, veikiamos išorinių kintamų-kartotinių apkrovų (KKA). Žinomos tik išorinių apkrovų kitimo ribos, leidžiančios bet kokių apkrovimo programų (istorijų) realizacijas. Konstrukcijų medžiagai taikoma Prantlio (L. Prandtl's) diagrama, galioja mažų deformacijų prielaida. Uždavinių matematiniai modeliai disertacijoje sudaryti remiantis eskreminiais energiniais mechanikos principais bei matematinio programavimo teorija.

Įvadiniamе skyriuje aptariama tiriamoji problema, darbo aktualumas, tyrimų objektas, formuluojamas darbo tikslas, uždaviniai, aprašoma tyrimų metodika, darbo mokslinis naujumas, darbo rezultatų praktinė reikšmė bei ginamieji teiginiai. Įvado gale pristatomos disertacijos tema autoriaus paskelbtos publikacijos.

Pirmajame skyriuje pateikiama rėminių konstrukcijų pristaikomumo tyrimų analizė. Istoriniame kontekste apžvelgiamos KKA veikiamų konstrukcijų pristaikomumo – Melano ir nepristaikomumo – Koiterio teoremos. Aptariamas minėtų teoremų dualumo ryšys. Pateikiamas konstrukcijų, patiriančių ciklinę plastiškąją suirtį, optimizavimo uždavinio bendrasis matematinis modelis.

Antrajame disertacijos skyriuje, pasitelkus prisitaikomo teorijos Melano teoremą, tobulinama tamprių-plastinių konstrukcijų, esant kintamai kartotinei apkrovai, optimizavimo metodika. Pagrindinis dėmesys čia kreipiamas liekamųjų poslinkių kitimo ribų nustatymo metodikos tikslinimui. Disertacijoje pristatoma sukurtoji liekamųjų poslinkių skenavimo metodika, grindžiama Melano teoremos interpretacija, nereikalaujanti įrašų ir poslinkių influentinių matricų kaitos kiekviename naujame skenavimo etape. To neišvengiama analizuojant konkrečią apkrovimo istoriją, kai dėl plastinių deformacijų keičiasi konstrukcijos skaičiuojamoji schema.

Trečiajame skyriuje skaitiniais eksperimentais aiškinama plieninių ir gelžbetoninių rėminių konstrukcijų optimizavimo pristaikomumo sąlygomis metodika. Trečiojo skyriaus pirmojoje dalyje sprendžiamas pristaikančių plieninės rėminės konstrukcijos tūrio optimizavimo uždavinys. Trečiojo skyriaus antrojoje dalyje pateikiamas ir skaitiniu eksperimentu patikrinamas modifikuotas gelžbetoninių konstrukcijų pristaikomumo sąlygomis optimizavimo matematinis modelis. Matematiniam modelyje takumo sąlygos išvestos atsižvelgiant į gelžbetoninio skerspjuvio stiprumo sritį pagal Eurokodo 2 reikalavimus. Armatūros projektavimas integruotas į optimizavimo uždavinio sprendimo algoritmą.

Ketvirtajame skyriuje pateikiama optimizavimo uždavinių sprendinių kokybės kontrolės metodika. Sprendiniai patikrinami pasitelkus Rozeno projektuojamųjų gradientų metodą. Metodika gali būti pritaikyta ir kontinualių konstrukcijų (plokštės, kevalai) optimizavimo uždavinių sprendinių kontrolei.

Abstract

The dissertation investigates the elastic-plastic beam-type frame structures, which are subjected to external variable repeated loads (VRL). Only the bounds of loads variation are known, which allows realization of any loading program (history). Material model of the structures is based according to the Prandtl's diagram, small deformations assumption is considered. Mathematical models of optimization problems, in this thesis, are created according to the extremum energy principles of mechanics and mathematical programming theory.

The introduction reveals the investigated problem, importance of the thesis, the object of research, describes the purpose and tasks of the thesis, research methodology, scientific novelty, the practical significance of results and defended statements. The introduction ends with a list of author's publication on the subject of defended dissertation.

Chapter 1 provides overview of the literature. Shakedown – Melan theorem and non-shakedown – Koiter theorems, of the structures subjected to VRL, are described in historic context. The duality of these theorems is discussed. General mathematical model of the optimization problem for the structures which experiences cyclic plastic collapse is presented.

In Chapter 2 optimization methods of elastic perfectly plastic structures subjected to VRL are improved by means of Melan's shakedown theorem. The main focus here is to improve the methods of determination of residual displacements variation bounds. Created methodology for estimation of residual displacement is presented in this thesis, based on the interpretation of Melan theorem and does not require formation of new influence matrices at each new scanning stage. This cannot be ignored by analyzing particular history of loading, because calculation scheme of the structure changes due to plastic deformations.

Chapter 3 explains methodology of steel and reinforced concrete structures optimization at shakedown conditions through numerical experiments. Volume optimization of steel structure is explained in the first part of Chapter 3. In the second part of Chapter 3 a modified mathematical model of optimization at shakedown problem of reinforced concrete structures is presented and numerically tested. Yielding conditions in the mathematical model is derived according to the strength locus of reinforced concrete cross-section considering Eurocode 2 requirements. Design of required reinforcement is integrated into the optimization algorithm.

In Chapter 4 optimization solution quality validation methodology is presented. Numerical results are validated according to the Rosen's gradient projection method. Optimization solution validation methodology can be adapted and for continuum structures (plates, shells).

Žymėjimai

Matematiniai simboliai

$A = [A_{ij}]$ – stačiakampė arba kvadratinė matrica, A_{ij} – jos elementai (i – eilutės numeris, j – stulpelio numeris)

A^T – matricos A transponuotoji matrica

A^{-1} – kvadratinės matricos A atvirkštinė matrica

I – vienetinė matrica

$F = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_m]^T$ – vektorius, F_1 – jo komponentai

f, \mathcal{F} – funkcija

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ – funkcijos f dalinė išvestinė pagal x_i

∇f – funkcijos f gradientas

\mathcal{L} – Lagranžo funkcionalas

Δ – kintamųjų pokytis, prieaugis

Lotyniški rašmenys

A – skerspjūvio plotas

- A_s – armatūros skerspjūvio plotas
 A – pusiausvyros lygčių koeficientų matrica
 a_1, a_3 – skerspjūvio parametrų ryšio konstantos
 B – takumo sąlygų laisvųjų narių vektorius
 b – elemento skerspjūvio plotis
 b_1, b_3 – skerspjūvio parametrų ryšio konstantos
 C – plastiškumo konstanta
 c – ribinių įrašų santykio koeficientas
 D – konstrukcijos elementų pasidavimo matrica
 d – atsumas nuo skerspjūvio viršaus iki tempiamos armatūros
 E – medžiagos tamprumo modulis (Jungo modulis)
 e – ašinės jėgos ekscentricitetas
 EA – tempiamo ar gniuždomo strypo standis
 EI – lenkiamojo strypo standis
 I – ploto inercijos momentas (antrasis ploto momentas)
 F – išorinė sutelktoji jėga
 F – išorinių jėgų vektorius
 f_{cd} – skaičiuojamasis betono stipris
 f_{ck} – cilindrinis charakteristinis gniuždomasis betono stipris po 28 dienų kietėjimo
 f_y – plieno takumo įtempių riba
 f_{yd} – skaičiuotinis armatūros plieno takumo stipris
 G – influentinė liekamųjų įrašų matrica
 H – influentinė liekamųjų poslinkių matrica
 h – elemento skerspjūvio aukštis
 J – apkrovų srities viršūnių indeksų aibė
 K – baigtinių elementų indeksų aibė
 K – Huko dėsnio standumo matrica, diskretinės sistemos standumo matrica
 L – strypo (elemento) ilgis
 M – lenkimo momentas
 m – diskretinio modelio laisvumo laipsnis
 N – tempiamo ar gniuždomo strypo ašinė jėga

n – įrašų, deformacijų vektoriaus komponentų skaičius
 \tilde{P} – projektyvinė matrica
 q – paskirstyto krūvio intensyvumas
 S – įrašų vektorius
 t – laikas
 u – poslinkių vektorius
 W – skerspjuvio atsparumo momentas
 x_{eff} – efektinis betono gniuždomosios zonos aukštis
 x' – betono gniuždomosios zonos ekvivalentinis aukštis
 Z – skenavimo etapų indeksų aibė

Graikiški rašmenys

α – įrašų influentinė matrica
 β – poslinkių influentinė matrica
 Γ – takumo sąlygų konfigūracijos matrica
 ε – santykinė deformacija
 ζ – diskretinio modelio pjūvių skaičius
 ζ_{lim} – gniuždomosios zonos ribinis sąlyginis aukštis
 σ – normalinis įtempis
 Θ – konstrukcijos elementų deformacijų vektorius
 κ_s – armatūros plieno takumo stiprio redukcijos koeficientas
 λ – plastinis daugiklis, strypo liaunis
 $\bar{\lambda}$ – sąlyginis liaunis
 Π – netiesinių takumo sąlygų (Von Mizeso) koeficientų matrica
 ρ – reikalingo armavimo koeficientas, plokštės spindulys
 Φ – takumo sąlygų matrica
 φ – takumo sąlyga
 χ – takumo įtempių redukcijos koeficientas (gniuždomų elementų klupamasis atsparis)

Indeksai

$comp$ – kompozitinis (angl. *composite*)
 cr – kritinis

e – tamprus (angl. *elastic*)
eff – efektyvinis, efektinis
i – diskretinio modelio skaičiuojamojo pjūvio numeris
inf – apatinė riba
hor – horizontalus
j – įrašų / apkrovų srities (hodografo) viršūnė
k – eilės / vektoriaus komponento / elemento numeris
l – elemento mazginio taško numeris
lim – riba, ribinis
m – apkrovimo jėgų ar poslinkių vektoriaus komponentų skaičius
p, pl – plastinis (angl. *plastic*)
r – liekamasis (angl. *residual*)
sup – viršutinė riba
T – tranponuotas
tr – transformuotas
val – reikšmė (angl. *value*)
vert – vertikalus
y – takumas (angl. *yield*)
z – skenavimo etapo numeris
0, lim – ribinis
**, opt* – optimalus

Santrumpos

BIM – pastato informacinis modelis (angl. *Building information model*)
 DOF – diskretinio modelio laisvumo laipsnis (angl. *degree of freedom*)
 EN, EC – Euronormos, Eurokodas (angl. *Eurocode*)
 ĮDB – įtempių deformacijų būvis
 KKA – kintama kartotinė apkrova
 STR – statybos techninis reglamentas

Turinys

IVADAS	1
Problemos formulavimas	1
Darbo aktualumas	2
Tyrimų objektas	2
Darbo tikslas	2
Darbo uždaviniai	2
Tyrimų metodika	3
Darbo mokslinis naujumas	3
Darbo rezultatų praktinė reikšmė	3
Ginamieji teiginiai	3
Darbo rezultatų aprobavimas	4
Disertacijos struktūra	4
1. RĖMINIŲ KONSTRUKCIJŲ PRISITAikomUMO TYRIMŲ ANALIZĖ	5
1.1. Pagrindinės prisitaikomumo teorijos kryptys	6
1.2. Konstrukcijų diskretizacija	8
1.2.1. Bendrosios pastabos apie apkrovą ir konstrukcijos medžiagą	8
1.2.2. Diskretinis prisitaikančios konstrukcijos aprašymas	10
1.3. Prisitaikomumo būvio analizės bendrasis uždavinys	14
1.3.1. Statinė analizės uždavinio formuluotė	14
1.3.2. Kinematinė analizės uždavinio formuluotė	15
1.3.3. Liekamųjų dydžių influentinės matricos	16
1.3.4. Analizės uždavinio skaitinio sprendimo metodika	17
1.4. Patikslintas optimizacijos uždavinio matematinis modelis	24
1.5. Pirmojo skyriaus išvados ir disertacijos uždavinių formulavimas	25

2. MELANO TEOREMOS INTERPRETACIJA: SKENAVIMO METODAS	
LIEKAMIESIEMS POSLINKIAMS	27
2.1. Apkrovų srities skenavimas ir analizės uždavinys	28
2.2. Nauja liekamųjų poslinkių nustatymo metodologija	30
2.2.1. Skenavimo uždavinys liekamųjų įrašų prieaugiams	30
2.2.2. Dualus skenavimo uždavinys liekamiesiems poslinkiams	31
2.3. Plastinių deformacijų prieaugių skaitinis nustatymas	32
2.4. Liekamųjų poslinkių ribų nustatymas	42
2.5. Antrojo skyriaus išvados	45
3. OPTIMIZAVIMAS PRISITAIKOMUMO SĄLYGOMIS: IŠPLĖSTINIAI	
SKAITINIAI EKSPERIMENTAI	47
3.1. Prisitaikančių plieninių rėminių konstrukcijų optimizavimas ribojant poslinkius	48
3.2. Gelžbetoninių rėminių konstrukcijų optimizavimas prisitaikomumo sąlygomis	55
3.2.1. Gelžbetoninio skerspjuvio stiprumo sąlygos	55
3.2.2. Modifikuotas matematinis modelis gelžbetoninių konstrukcijų optimizavimui prisitaikomumo sąlygomis	60
3.2.3. Gelžbetoninio rėmo optimizavimo skaitinis eksperimentas	64
3.3. Trečiojo skyriaus išvados	71
4. OPTIMIZAVIMO PRISITAIKOMUMO SĄLYGOMIS REZULTATŲ	
KONTROLĖ	73
4.1. Prisitaikančios apvalios plokštės optimizavimo uždavinio matematinis modelis	74
4.2. Skaitiniai plokštės optimizavimo MATLAB sistema rezultatai	77
4.3. Rozeno projektuojamųjų gradientų algoritmo optimalumo sąlygos	80
4.4. Baigiamoji skaitinių rezultatų kontrolė prisitaikiusiai plokštei	82
4.4. Ketvirtjo skyriaus išvados	84
BENDROSIOS IŠVADOS	85
LITERATŪRA IR ŠALTINIAI	87
AUTORIAUS MOKSLINIŲ PUBLIKACIJŲ DISERTACIJOS TEMA SĄRAŠAS	93
SUMMARY IN ENGLISH	95
PRIEDAI ¹	111
A priedas. Rėmo bendrosios analizės programinis kodas	113
B priedas. Skenavimo procedūros programiniai kodai	121
C priedas. Plieninio rėmo optimizavimo programinis kodas	159
D priedas. Gelžbetoninio rėmo optimizavimo programinis kodas	207
E priedas. Optimizavimo rezultatų kontrolės pagalbiniai duomenys	227
F priedas. Bendra autorių sutikimai teikti publikacijose skelbtą mokslinę medžiagą daktaro disertacijoje	231
G priedas. Autoriaus mokslinių publikacijų disertacijos tema kopijos	241

¹ Priedai pateikiami pridėtoje kompaktinėje plokštelėje

Contents

INTRODUCTION	1
Problem formulation.....	1
Relevance of the thesis	2
Research object.....	2
Aim of the thesis.....	2
Objectives of the thesis.....	2
Research methodology	3
Scientific novelty of research findings	3
Practical value of research findings.....	3
Defended statements.....	3
Approval of research findings	4
Structure of the thesis	4
1. ANALYSIS OF FRAMED STRUCTURES SHAKEDOWN RESEARCHES	5
1.1. Main directions of the shakedown theory	6
1.2. Discretization of the structures	8
1.2.1. General remarks about load and material of the structure	8
1.2.2. Discretization of the structures at shakedown.....	10
1.3. General formulation of analysis problem at shakedown state.....	14
1.3.1. Static formulation of analysis problem	14
1.3.2. Kinematic formulation of analysis problem.....	15
1.3.3. Influence matrices of residual values.....	16
1.3.4. Methodology of analysis problem numerical calculation	17
1.4. Improved mathematical model of optimization problem.....	24
1.5. Conclusions of Chapter 1 and formulation of the objectives.....	25

2. MELAN THEOREM INTERPRETATION: SCANNING METHOD FOR RESIDUAL DISPLACEMENTS	27
2.1. Load locus scanning and analysis problem	28
2.2. New methodology for determination of residual displacements	30
2.2.1. Scanning problem for increments of residual forces	30
2.2.2. Dual scanning problem for residual displacements	31
2.3. Numerical determination of increments of plastic deformations	32
2.4. Determination of residual displacements variation bounds	44
2.5. Conclusions of Chapter 2	45
3. OPTIMIZATION AT SHAKEDOWN CONDITIONS: EXTENDED NUMERICAL EXPERIMENTS	47
3.1. Optimal shakedown design of steel framed structures with displacements bounds	48
3.2. Optimal shakedown design of reinforced concrete structures	55
3.2.1. Strength conditions of reinforced concrete cross-section	55
3.2.2. Modified mathematical model for optimal shakedown design of reinforced concrete structures	60
3.2.3. Optimization of reinforced concrete frame numerical experiment	64
3.3. Conclusions of Chapter 3	71
4. RESULTS CONTROL OF OPTIMIZATION AT SHAKEDOWN	73
4.1. Mathematical model of optimization problem of circular plate at shakedown	74
4.2. Numerical results of plate optimization using MATLAB system	77
4.3. Rosen's gradient projection algorithm optimality conditions	80
4.4. Final control of numerical results of plate at shakedown	82
4.4. Conclusions of Chapter 4	84
GENERAL CONCLUSIONS	85
REFERENCES	87
LIST OF SCIENTIFIC PUBLICATIONS BY THE AUTHOR ON THE TOPIC OF THE DISSERTATION.....	93
SUMMARY IN ENGLISH.....	95
ANNEXES ¹	111
Annex A. Programming code of frame general analysis	113
Annex B. Programming codes of scanning procedure	121
Annex C. Programming code of steel framed structure optimization	159
Annex D. Programming code of reinforced concrete framed structure optimization	207
Annex E. Additional data for control of optimization results.....	227
Annex F. Agreements of co-authors to provide published material in the thesis	231
Annex G. Copies of scientific publications by the author on the topic of the thesis	241

¹ The annexes are supplied in the attached compact disc

Ivadas

Problemos formulavimas

Plastiškumo teorijoje pirmieji darbai, skirti konstrukcijų, veikiamų kintamos kartotinės apkrovos (KKA), elgsenos analizei ir projektavimui, buvo siejami su ciklinio plastinio suirimo būviu (ribinė pusiausvyra) (Čyras 1969; Maier 1969). Pristatant prie KKA konstrukcijų būvio nagrinėjimas dažniausiai grindžiamas klasikinėmis Melano (Melan 1936) ir Koiterio (Koiter 1960) teoremomis, leidžiančiomis analizuoti nesudėtingas konstrukcijas (pagrindinis teorems trūkumas: neįmanoma nustatyti galimų deformacijų, jei žinomos tik KKA kitimo ribos). Esant tokiai pradinei informacijai apie apkrovas, konstrukcijų mechanikos uždavinys (poslinkių, deformacijų, įrašų nustatymas) yra neapibrėžtas, kadangi plastiškumo teorijoje reikalaujama apkrovimo istorijos žinojimo. Galima nustatyti tik liekamųjų poslinkių ir deformacijų kitimo ribas. Melano teoremos formuluotę susiejus su iškilojo netiesinio matematinio programavimo teorija, disertacijoje sukurta nauja liekamųjų poslinkių kitimo ribų nustatymo metodika: „Skenavimo metodas poslinkiams“. Tai naujas, neturintis mokslinėje literatūroje analogo, skaitmeninis įrankis poslinkių analizei. Skenavimo metodo poslinkiams kūrimas, jo tinkamumo pristatant konstrukcijų optimizavimo problematikoje nagrinėjimas ir yra šios disertacijos pagrindinė tiriamoji problema.

Darbo aktualumas

Konstrukcijų optimizavimas, esant prisitaikomumo būviui, leidžia parengti pačius ekonomiškiausius tokių konstrukcijų projektus ir iš dalies mažinti statybos kainas (jei optimizavimo uždavinių sprendimo kokybė yra reikšmingai kontroliuojama!). Mokslinėje literatūroje pirmasis plastinės deformacijos (o tuo pačiu ir liekamuosius poslinkius) prisitaikomumo būviui nagrinėjo Koiteris (Koiter 1960). Jo knygoje parodyta, kad prisitaikančių konstrukcijų darbas yra baigtinis. Tačiau Koiterio pasiūlytoji integralinė formulė dėl nepakankamo tikslumo netaikytina prisitaikančių konstrukcijų optimizacijoje. Naujų ypatingų pasiūlymų liekamųjų poslinkių analizei mokslinėje literatūroje nėra. Taigi, disertacinio darbo aktualumas grindžiamas statybos inžinerijos aktualija: sukurti naują skaitiniais konstrukcijų skaičiavimo ir matematinio programavimo metodais pagrįstą liekamųjų poslinkių kitimo ribų nustatymo įrankį. Tokio įrankio sukūrimas atskleidžia naujas perspektyvas plastinės deformacijos patiriančių statybinių konstrukcijų analizės ir optimizavimo srityse.

Tyrimų objektas

Tyrimų objektas – prisitaikančių rėminių konstrukcijų analizė ir optimizavimas, taikant stiprumo ir standumo ribojimų sąlygas.

Darbo tikslas

Šio darbo pagrindinis tikslas – sukurti naują prisitaikančių konstrukcijų poslinkių ir deformacijų analizės skenavimo metodą ir integruoti jį į optimizavimo uždavinio matematinį modelį.

Darbo uždaviniai

Darbe reikia spręsti šiuos uždavinius:

1. Ištirti Melano teoremos sąsajas su matematinio programavimo teorija.
2. Sudaryti liekamųjų poslinkių skenavimo uždavinio matematinį modelį, skaitiniais eksperimentais jį patikrinti.
3. Atskleisti prisitaikomumo teorijos taikymo galimybes nagrinėjant plieninių ir gelžbetoninių konstrukcijų darbą.
4. Patikrinti ir įvertinti prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo uždavinių skaitinių sprendinių kokybę.

Tyrimų metodika

Tyrimai atlikti remiantis plastiškumo teorijos, matematinio programavimo ir skaitinių metodų integracija. Laikomasi mažų deformacijų ir kvazistatinės apkrovos prielaidų. Disertacijoje išskiriamos teorinė ir skaitinių eksperimentų dalys.

Darbo mokslinis naujumas

Disertacijoje padaryta reikšminga pažanga (sukurtas skenavimo metodas) nustatant liekamųjų poslinkių kitimo ribas, esant nepilnai informacijai apie apkrovų kitimą. Skenavimo metodo taikymas leidžia patikslinti prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo rezultatus.

Darbo rezultatų praktinė reikšmė

Teoriniai sistemų prisitaikomumo principai, diskretizacija, matematiniai optimizavimo uždavinių modeliai disertacijoje sudaro logiškai vieningą mokslinę problemą. Sukurtieji prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo uždavinių matematiniai modeliai, jų sprendimo algoritmai yra pakankamai universalūs. Tai skatina ir sparčiau statybinių konstrukcijų optimizavimo rezultatų diegimą į projektavimo praktiką. Disertacijoje pasiūlytos liekamųjų poslinkių ribų nustatymo idėjos gali būti pritaikytos ir statybinių konstrukcijų komercinėse projektavimo sistemose, kurios integruojamos į statinio informacinio modeliavimo (BIM) struktūrą. Tai leistų įvertinti ir kaupti informaciją apie tai ar konstrukcija nepažeidžia saugos ir tinkamumo ribinių būvių reikalavimų per visą jos gyvavimo ir naudojimo ciklą.

Ginamieji teiginiai

1. Melano teoremos išvados gali būti sėkmingai taikomos tiek nusikraunančių, tiek nenusikraunančių konstrukcijų deformuoto būvio analizei.
2. Kai apkrovų kitimo sritis yra plečiama, skenavimo procedūra grindžiama papildomos deformavimo energijos minimumo principu.
3. Skenavimo metodas apkrovų kitimo srities viduje leidžia išskirti ribas poaibių, išreiškiančių vieną ar kitą prisitaikomumo reiškinių charakterį (pavyzdžiui, nenusikraunančių skerspjūvių egzistavimas visame prisitaikomumo procese).

4. Sukauptų plastinių deformacijų nustatymas ir klasikinis prisitaikymo teorijos uždavinys gali būti apjungti į vieningos metodikos sistemą, kuri nereikalauja individualaus specifinio algoritmo kūrimo skirtingoms konstrukcijoms.
5. Patikslintas optimizavimo uždavinio matematinis modelis gali būti taikomas projektuojant prisitaikančias plienines ir gelžbetonines rėmines konstrukcijas.

Darbo rezultatų aprobavimas

Disertacijos tema yra paskelbti 9 moksliniai straipsniai: vienas „ISI Web of Science“ indeksuojamame žurnale, turinčiame citavimo rodiklį (Liepa *et al.* 2016); trys – kitose tarptautinėse duomenų bazėse esančiuose mokslo leidiniuose (Alawdin *et al.* 2016; Liepa *et al.* 2014; Liepa, Karkauskas 2012); du – tarptautinių konferencijų leidiniuose referuojamuose „ISI Proceedings“ duomenų bazėje (Alawdin, Liepa 2016; Blaževičius *et al.* 2016); vienas – kitose duomenų bazėse referuojamame tarptautinės konferencijos leidinyje (Liepa, Gervytė 2015); du – nacionalinių konferencijų leidiniuose (Liepa *et al.* 2014; Liepa, Karkauskas 2012).

Disertacijoje atliktų tyrimų rezultatai buvo aprobuoti penkiose mokslinėse konferencijose Lietuvoje ir užsienyje:

- Lietuvos jaunųjų mokslininkų konferencijose „*Mokslas – Lietuvos ateitis*“ 2012 m. ir 2014 m. Vilniuje;
- Užsienio tarptautinėje konferencijoje „*Fifteenth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing*“ 2015 m., Prahoje, Čekijos respublikoje;
- Tarptautinėje konferencijoje „*Mechanika–2016*“ 2016 m. Kaune;
- Užsienio tarptautinėje konferencijoje „*XIII International Conference on Metal Structures*“ 2016 m., Zielona Goroje, Lenkijoje.

Disertacijos struktūra

Disertaciją sudaro įvadas, keturi skyriai ir bendrosios išvados. Taip pat yra septyni priedai. Darbo apimtis yra 109 puslapiai, neskaitant priedų, tekste panaudota 175 numeruotos formulės, 34 paveikslai ir 14 lentelių. Rašant disertaciją buvo panaudoti 82 literatūros šaltiniai.

Rėminių konstrukcijų prisitaikomumo tyrimų analizė

Skyriuje aprašomi plieninių (medžiagos fizikinis modelis atitinka idealiai tamprią-plastinę medžiagos elgseną) strypinių konstrukcijų pagrindiniai diskretizavimo pusiausviraiais baigtiniais elementais principai. Istoriniame kontekste apžvelgiamos kintamos kartotinės apkrovos (KKA) veikiamų konstrukcijų prisitaikomumo – Melano ir neprisitaikomumo – Koiterio teoremos (1.1 poskyryje atlika kompaktiška analitinė literatūros apžvalga). Aptariamas minėtų teoremų dualumo ryšys. Pateikiamas konstrukcijų, patiriančių ciklinę plastiškąją suirtį, optimizavimo uždavinio bendrasis matematinis modelis. Taip pat pateikiamas konstrukcijos iki-suiriminės būsenos tikrojo įtempių deformacijų būvio (ĮDB) kintamųjų nustatymo – analizės uždavinio matematinis modelis. Pasitelkiant Kuno – Takerio (Khun – Tucker) sąlygas suformuojamos influentinės matricos liekamųjų kintamųjų dydžių dalių nustatymui. Aptariama optimizavimo uždavinio matematinio modelio liekamųjų poslinkių ribų nustatymo problematika dėl galimo skerspjūvių nusikrovimo pasireiškiančiu liekamųjų poslinkių vystymosi nemonotoniškumu.

Skyriaus tema disertacijos autorius yra paskelbęs tris straipsnius (Liepa *et al.* 2014a, 2014b; Liepa *et al.* 2016).

1.1. Pagrindinės prisitaikomumo teorijos kryptys

Prisitaikomumo teorija – tai ribinio būvio analizės, veikiant kintamoms kartotinėms apkrovoms, plėtinys (König 1987, 1982). Kartotinė kintama apkrova (KKA) – tai sistema jėgų ar jų grupių, veikiančių nepriklausomai viena nuo kitos (Atkočiūnas 2012; Koiter 1960; König 1987).

Veikiant kintamai kartotinei apkrovai, konstrukcijos elgsena gali būti trejopa: suirimas dėl išplitusių didelių plastinių deformacijų (progresyvinis arba momentinis suirimas, kaip ir vienkartinės apkrovos atveju); suirimas dėl kintamo plastiškumo (priešingo ženklo deformacijų suma cikle lygi nuliui); pradiniuose apkrovos cikluose pasireiškus plastinėms deformacijoms, vėliau konstrukcija dirba visiškai tampriai, t. y. ji prisitaiko prie duotosios KKA. Prisitaikomumo reiškinys būdingas tampriosioms plastinėms konstrukcijoms. Plačiausiai žinomos Melano (Melan 1936) ir Koiterio (Koiter 1960) teoremos.

Nors Melano teorema (Melan 1936) paskelbta dar prieš antrąjį pasaulinį karą, tačiau didesnio susidomėjimo ji susilaukė tik praeito šimtmečio pabaigoje. Visų pirma tai italų mokslininkų Maierio (Maier 1969), Corradi (Corradi, Maier 1974; Corradi, Zavelani 1974), Capurso (Capurso 1974; Capurso *et al.* 1979), Corigliano (Corigliano *et al.* 1995), Polizoto (Polizzotto 1979) ir kitų darbai. Taip pat Didžiosios Britanijos mokslininkų darbai: Ponterio (Ponter 1975, 1972), Hodžo (Hodge 1954; Hodge, Kalinowski 1970). Lenkijoje prisitaikomumo teoriją plėtojo Savčukas (Sawczuk 1974), Kionigas (König 1987, 1982), Dorošas (Doros *et al.* 1981), Alavdinas (Alawdin 1994, 1987, 1979) ir daugelis kitų. Tuo laiku buvusioje Tarybų Sąjungoje prisitaikomumo problemas nagrinėjo Rozenblumas (Rozenblum 1958), Gokfeldas (Gokhfeld 1966; Gokhfeld, Cherniavsky 1980), Moskvitinas (Moskvitin 1965, 1960). Pastaraisiais metais svarių rezultatų pasiekta Vokietijoje (Simon *et al.* 2013, 2012; Stein *et al.* 1993; Weichert, Hachemi 2009, 2006).

Iš gautų literatūros analizės rezultatų pažymėtina:

1. Atskirų kriterijų, apibendrinančių inkrementinį suirimą ir kintamą plastiškumą, išvedimas (Gokhfeld 1966; Koiter 1960; Sawczuk 1969).

2. Procedūrų, leidžiančių apriboti maksimalias deformacijas prieš pat įvykstant prisitaikomumui kūrimas (Capurso 1974; Casciaro, Garcea 2002; König 1987) ir jų tolimesnės paieškos disertacijoje būtinumas.

3. Prisitaikomumo analizės išplėtimas sustiprėjančioms konstrukcijoms (Alawdin 2005; Alawdin, Urbańska 2013; König, Siemaszko 1988; Stein *et al.* 1993, 1992).

4. Geometrinio netiesiškumo įvertinimas (Tritsch, Weichert 1995; Weichert 1986; Weichert, Hachemi 1998).

Statinė prisitaikomumo analizės formuluotė, grindžiama Melano teorema, neišskiria skirtingų neprisitaikomumo būvių. Inkrementinio suirimo kriterijų pagal Koiterio (Koiter 1960) teoremą išvedė Gokfeldas ir Savčukas (Gokhfeld 1966; Sawczuk 1969). Kaip ir ribinės pusiausvyros teorija, prisitaikomumo teorija leidžia nustatyti pradinio progresyvinio irimo sąlygas.

Viena iš prisitaikomumo teorijos praktinio taikymo kliūčių yra aiškos lokalinių plastinių deformacijų prisitaikomumo sąlygomis nustatymo metodikos nebuvimas. Iš tikrųjų, neleistina gali būti net plastinė deformacija, sąlygota pradinių apkrovos ciklų pakeliui į prisitaikomumo būvį. Vieno iš pirmųjų darbų, skirtų tampaiai plastinių konstrukcijų poslinkių kitimo ribų nustatymui autorius yra Ponteris (Ponter 1972). Jis apibendrina principą, įgalinantį nustatyti tampaiai plastinės konstrukcijos viršutines poslinkių kitimo ribas nuo kintamos kartotinės apkrovos. Ponterio darbe poslinkių viršutinė riba yra gaunama, kaip suma poslinkių, esant idealiai tampaiai konstrukcijai, ir liekamųjų poslinkių, kurie gali būti gauti pagal liekamųjų įtempių tampaiai deformacijų energijos principą. Analogišką metodiką liekamųjų poslinkių įvertinimui taikė ir Capurso (Capurso 1974).

Gynimui teikiamoje disertacijoje svarbi vieta skiriama prisitaikomumo būvio liekamųjų poslinkių ribų nustatymui. Tęsiant analitinę literatūros analizę nustatyta, jog iki šiol plačiai taikomas Kionigo (König 1982) suformuluotas poslinkių ribų nustatymo uždavinys:

$$\text{rasti} \quad \max \quad \left(\Psi_1^T \beta + \Psi_2^T \lambda \right), \quad (1.1)$$

$$\text{esant sąlygoms} \quad \alpha \leq \beta \leq b, \quad (1.2)$$

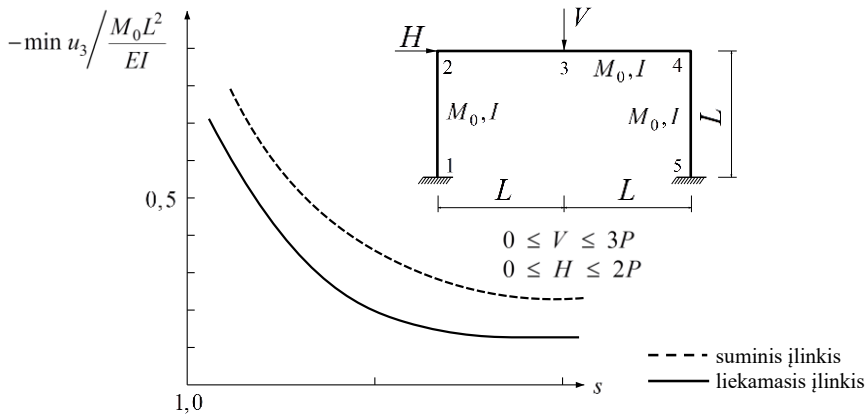
$$N^T (A\beta + B\lambda) - k \leq 0, \quad (1.3)$$

$$k^T \lambda \leq \frac{1}{2} \frac{s}{s-1} \bar{\rho}^T E^{-1} \bar{\rho}, \quad (1.4)$$

$$\lambda \geq 0. \quad (1.5)$$

Tai tiesinio programavimo uždavinys, čia s – prisitaikomumo atsargos koeficientas, (1.3) yra takumo sąlygos, o (1.4) – plastinio darbo ribojimo sąlyga, λ – plastinių daugiklių vektorius. Tikslu funkcija (1.1) išreiškia suminį poslinkį.

1.1 paveiksle pateikiama iliustracija rėmo poslinkių analizei pagal matematinį modelį (1.1)–(1.5).



1.1 pav. Suminio ir liekamojo įlankio priklausomybė nuo prisitaikomumo koeficiento s

Fig. 1.1. Total and residual deflection dependence on shakedown coefficient s

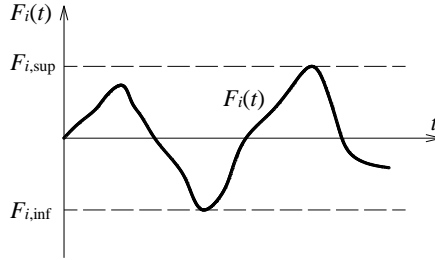
Iš pateikto grafiko (1.1 pav.) matyti, jog matematinio modelio (1.1)–(1.5) tikslo funkcija yra neapibrėžta, kai $s \rightarrow 1,0$. Todėl disertacijoje naujos liekamųjų poslinkių skaičiavimo metodikos, nepriklausančios nuo s , kūrimo pagrįstumas ir aktualumas tampa akivaizdus. Siūlomas skenavimo metodas poslinkiams (2-asis disertacijos skyrius) leidžia patikslinti tinkamumo ribinio būvio sąlygas matematinuose diskretinių rėminių konstrukcijų optimizavimo prisitaikomumo sąlygomis modeliuose (3-čiasis skyrius).

1.2. Konstrukcijų diskretizacija

1.2.1. Bendrosios pastabos apie apkrovą ir konstrukcijos medžiagą

Statybines konstrukcijas veikiančios apkrovos retai būna vienkartinės, dažnai jos turi kartotinį kintamą veikimo pobūdį (1.2 pav.), artimą ciklinei apkrovai. Apkrovos ciklu čia suprantame laiko tarpą τ , per kurį pasireiškia visi charakteringi konstrukcijos plastinės deformacijos ir elgsenos etapai.

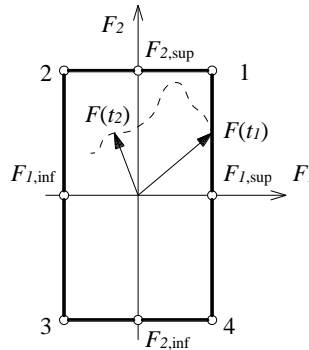
Dažniausiai KKA nusakoma ne konkrečia apkrovimo istorija, t. y. i -tosios jėgos kitimo laike t dėsnio $F_i(t)$, o tik ją sudarančių jėgų viršutinėmis $F_{i,sup}$ ir apatinėmis $F_{i,inf}$ kitimo ribomis, kurios nuo laiko t jau nebeprisitaikomos (1.2 pav.).



1.2 pav. Apkrova $F_i(t)$ charakterizuojama savo kitimo ribomis $[F_{i,sup}; F_{i,inf}]$

Fig. 1.2. The variation field of force $F_i(t)$, between its boundaries $[F_{i,sup}; F_{i,inf}]$

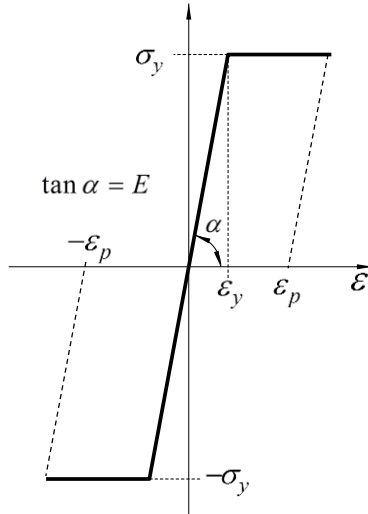
Dviejų sutelktųjų kartotinių kintamųjų jėgų $\mathbf{F} = [F_1 \ F_2]^T$ atveju, jų kitimo sritis užrašoma taip: $F_{inf} \leq F_j \leq F_{sup}$, $j \in J$. Čia $F_{1,inf} \leq F_1(t) \leq F_{1,sup}$, $F_{2,inf} \leq F_2(t) \leq F_{2,sup}$ ir grafiškai vaizduojama stačiakampiu (1.3 pav.). Jo kiekviena viršūnė reiškia jėgų kombinaciją \mathbf{F}_j , $j = 1, 2, \dots, p = 4$.



1.3 pav. Dviejų jėgų $F_1(t)$ ir $F_2(t)$ kitimo sritis

Fig. 1.3. Variation locus of two forces $F_1(t)$ and $F_2(t)$

Plastinių konstrukcijų darbui aprašyti dažniausiai taikomas fizikinis idealiai tamprios-plastinės medžiagos modelis. Idealiai tampri plastinė medžiaga apibūdinama Prantlio (Prandtl's) diagrama (1.4 pav.). Čia sąlyginės tiesinės deformacijos yra $\varepsilon = \sigma/E$, čia E – tamprumo modulis; σ – normaliniai įtempiai (takumo riba žymima σ_y). Eksperimentais įrodyta, jog plastinių deformacijų ε_p atsiradimas susijęs su sudėtingu negrįžtamu termodinamikos procesu.



1.4 pav. Idealiai tamprios-plastinės medžiagos modelis Prantlio diagrama
Fig. 1.4. Prandtl's diagram of elastic-plastic material

1.2.2. Diskretinis prisitaikančios konstrukcijos aprašymas

Šioje disertacijoje konstrukcijos, kurios geometrija, medžiagos ir skerspjūvio parametrai yra žinomi, diskretizacijai taikomas pusiausvirų baigtinių elementų metodas (Atkočiūnas *et al.* 2015; Barauskas *et al.* 2004; Belytschko *et al.* 2013; Gallagher 1975; Kalanta 1995). Taikant šį metodą tiksliau nei darnių baigtinių elementų atvejais užrašomos pusiausvyros lygtys. Kartu tiksliau apibrėžiamos prisitaikiusios konstrukcijos statiskai galimos tampriosios S_e ir liekamosios S_r įrašos. Disertacijoje suminės įrašos žymimos $S = S_e + S_r$, poslinkiai $u = u_e + u_r$.

Konstrukcijos diskretinio modelio laisvės laipsnis m , o globalinių poslinkių u ir apkrovos F vektoriai yra atitinkamai $u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m]^T$ ir $F = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_m]^T$. Elemento k ($k = 1, 2, \dots, s, \ k \in K$) su v mazginių taškų (pjūvių) ($l = 1, 2, \dots, v, \ l \in L$) įrašų vektorius yra $S_k = [S_{k1} \ S_{k2} \ \dots \ S_{kv}]^T$. Bendras vektoriaus S_k komponentų skaičius yra $n_k = v \times \nu_k$, čia ν_k – įrašų skaičius mazginiame taške. Visos konstrukcijos disk-

retinio modelio pjūvių skaičius yra $\zeta = s \times v$, $i = 1, 2, \dots, \zeta$, $i \in I$. Visos konstrukcijos įrašų vektorius yra $S = [S_1 S_2 \dots S_\zeta]^T$, jo komponentų skaičius $n = \zeta \times v_k$.

Pusiausvyro baigtinio elemento įrašos $S_k(x)$ bet kuriame elemento taške x išreiškiamos mazginių taškų įrašomis S_k . Įrašų $S_k(x)$ aproksimuojančiosios funkcijos yra tokios:

$$S_k(x) = N_k(x) S_k, \quad (1.6)$$

čia $N_k(x)$ – k -tojo elemento įrašų aproksimacijos matrica (Kalanta 1995; Liepa, Karkauskas 2012a), S_k – n_k -matis įrašų elemento mazguose vektorius. Funkcijos $N_k(x)$ dažniausiai tokios, kad konstrukcijos elemento pusiausvyros diferencialinės lygtys

$$\mathcal{A} S(x) = q(x) \quad (1.7)$$

nėra tapatingai tenkinamos (čia \mathcal{A} – pusiausvyros dif. lygčių koef. matrica). Todėl diskretinio modelio pusiausvyra yra užtikrinama konstrukcijos elementams ir jų pagrindiniams mazgams. Įrašius priklausomybę (1.6) į lygtis (1.7) ir atlikus diferencijavimo veiksmus, algebrinės baigtinio elemento pusiausvyros lygtys gaunamos tokios:

$$A_k(x) S_k = q_k, \quad k \in K, \quad (1.8)$$

čia $A_k(x) = \mathcal{A} N_k(x)$, o apkrova paskirstyta tolygiai ir $q_k(x) = q_k$. Atskiri elementai į sistemą jungiami rašant pusiausvyros lygtis pagrindiniams elementų mazgams. Atsižvelgus į kraštines sąlygas, konstrukcijos pusiausvyros lygčių sistema galutinai užrašoma taip:

$$AS = F \text{ arba } \sum_k A_k S_k = F, \quad (1.9)$$

čia A – $(m \times n)$ eilės pusiausvyros lygčių koeficientų matrica; čia $n = \zeta \times n_k$, m – konstrukcijos diskretinio modelio laisvumo laipsnis. Statiškai leistinos įrašos S_r tenkina pusiausvyros lygtį:

$$AS_r = 0. \quad (1.10)$$

Konstrukcijos diskretinio modelio geometrinės lygtys gali būti gaunamos taikant įtempių galimų pokyčių principą. Geometrinės lygtys paskiram baigtiniam elementui k yra:

$$\mathbf{A}_k^T \mathbf{u} - \mathbf{D}_k \mathbf{S}_k = \mathbf{0}, \quad k \in K. \quad (1.11)$$

Čia k -tojo elemento pasidavimo matrica \mathbf{D}_k lokalinių koordinačių sistemoje, skaičiuojama pagal formulę:

$$\mathbf{D}_k = \int_{A_k} \mathbf{N}_k^T(\mathbf{x}) \mathcal{D} \mathbf{N}_k(\mathbf{x}) dA. \quad (1.12)$$

Integruojama k -tojo elemento paviršiumi A_k (strypiniam elementui pagal jo ilgį L_k). Atsižvelgus į kraštines sąlygas, visam konstrukcijos diskretniam modeliui geometrinės lygtys yra:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{u} - \mathbf{D} \mathbf{S} = \mathbf{0}. \quad (1.13)$$

Čia \mathbf{D} – kvazidiagonalioji konstrukcijos elementų pasidavimų matrica. Poslinkių vektoriaus \mathbf{u} komponentų fizinę prasmę lemia pusiausvyros lygčių (1.9) sudarymo tvarka ir dualūs ryšiai tarp pusiausvyros ir geometrinių lygčių. Taikant žinomas baigtinių elementų procedūras iš karto gaunami tamprieji poslinkiai \mathbf{u}_e ir tampriosios įrašos \mathbf{S}_e .

Tampraus sprendinio vektoriai \mathbf{S}_{ej} bei \mathbf{u}_{ej} nuo kiekvienos apkrovos srities viršūnės \mathbf{F}_j yra tiesinės funkcijos

$$\mathbf{S}_{ej} = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{F}_j, \quad \mathbf{u}_{ej} = \boldsymbol{\beta} \mathbf{F}_j, \quad j \in J. \quad (1.14)$$

Čia $\boldsymbol{\alpha}$ ir $\boldsymbol{\beta}$ atitinkamai tamprių įrašų ir tamprių poslinkių influentinės matricos, kurių matricinės išraiškos:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1}, \quad \boldsymbol{\beta} = (\mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1}. \quad (1.15)$$

Tamprios-plastinės konstrukcijos takumo sąlygoms užrašyti bendru atveju naudojama plastiškumo konstanta $C_k \equiv S_{0k}$, kuri siejama su skerspjūvio ribine įraža S_0 . Ribinė įraža S_{0k} k -tajam baigtiniam elementui yra pastovi ($k \in K$). Tuomet netiesinė takumo sąlyga tikrinama kiekviename pjūvyje

$$\varphi_i = C_i - f(\mathbf{S}_{ei}(t) + \mathbf{S}_{ri}(t)) \geq 0, \quad i \in I \quad (1.16)$$

laike t (atsižvelgiant į visas galimas apkrovimo istorijas $\mathbf{F}(t)$). Konstrukcijos prisitaikymo būviui liekamosios įrašos \mathbf{S}_r kiekviename konstrukcijos pjūvyje $i = 1, 2, \dots, \zeta = s \times v$ turi užtikrinti takumo sąlygas (1.16) viršūnei \mathbf{S}_{ej} :

$$\varphi_{ij} = C_i - f_i(S_{ei,j} + S_{ri}) \geq 0, \quad i \in I, \quad j \in J. \quad (1.17)$$

Taigi takumo sąlygos tikrinamos kiekviename k -tojo baigtinio elemento mazginiame taške l :

$$\varphi_{kl,j} = C_k - f_{kl,j}(S_{ekl,j} + S_{rkl}) \geq 0, \quad k \in K, \quad l \in L, \quad j \in J. \quad (1.18)$$

Visai tampriai plastinei konstrukcijai netiesinės takumo sąlygos glaustai užrašomos taip:

$$\boldsymbol{\varphi}_j = \mathbf{C} - \mathbf{f}_j(S_{ej} + S_r) \geq \mathbf{0}, \quad j \in J. \quad (1.19)$$

Čia $\mathbf{C} = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_k \ \dots \ C_\zeta]^T$ – visos konstrukcijos plastiškumo konstantų vektorius. Statiškai leistinos liekamosios įrašos S_r tenkina pusiausvyros lygtis (1.10) ir takumo sąlygas (1.19).

Tamprios-plastinės konstrukcijos kinematiškai galimų liekamųjų poslinkių vektorius \mathbf{u}_r tenkina geometrines lygtis (1.13):

$$\mathbf{A}^T \mathbf{u}_r = \mathbf{D} \mathbf{S}_r + \boldsymbol{\Theta}_p, \quad (1.20)$$

čia $\boldsymbol{\Theta}_r = \mathbf{D} \mathbf{S}_r + \boldsymbol{\Theta}_p$ – liekamųjų, o $\boldsymbol{\Theta}_p = \boldsymbol{\Theta}_{pkl}^T$ – plastinių deformacijų vektorius. Vektoriaus $\boldsymbol{\Theta}_p$ komponentai yra skaičiuojami pagal formulę (Atkočiūnas 2012):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Theta}_{pkl} &= \sum_j \boldsymbol{\Theta}_{pkl,j} = \sum_j \left[\nabla \varphi_{kl,j}(S_{ekl,j} + S_{rkl}) \right]^T \lambda_{kl,j}, \\ \lambda_{kl,j} \varphi_{kl,j} &= 0, \quad \lambda_{kl,j} \geq 0, \quad k \in K, \quad l \in L, \quad j \in J. \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\text{Čia } \left[\nabla \varphi_{kl,j}(S_{ekl,j} + S_{rkl}) \right]^T = \left[\frac{\partial f_{kl,j}(S_{ekl,j} + S_{rkl})}{\partial S_{rkl}} \right] - \text{takumo sąlygų (1.18)}$$

gradientai; $\lambda_{kl,j}$ – plastiniai daugikliai. Prisitaikiusioje sistemoje dėl plastinių deformacijų $\boldsymbol{\Theta}_p$ atsiradusios liekamosios įrašos S_r užtikrina, jog kintant apkrovai naujos plastinės deformacijos nebesivystys. Konstrukcijos prisitaikymo liekamosios deformacijos $\boldsymbol{\Theta}_r = \mathbf{D} \mathbf{S}_r + \boldsymbol{\Theta}_p$ ir liekamieji poslinkiai \mathbf{u}_r gali būti ne vieninteliai: jie priklauso nuo konkrečios apkrovimo istorijos $\mathbf{F}(t)$ (Atkočiūnas, Norkus 1994). Todėl literatūros apžvalgos 1.1 poskyryje buvo išsamiau apsisistota prie Capurso (Capurso 1974; Capurso *et al.* 1979) ir Kionigo (König 1987, 1982; König, Kleiber 1978) darbų.

1.3. Prisitaikomumo būvio analizės bendrasis uždavinys

1.3.1. Statinė analizės uždavinio formuluotė

Optimizuojant konstrukcijas prisitaikomumo sąlygomis būtina atsižvelgti į konstrukcijų projektavimo normų ribinių saugos ir tinkamumo būvių reikalavimus. Dėl to yra formuluojami optimizavimo uždavinių matematiniai modeliai su atitinkamų ribinių būvių sąlygas įvertinančiais apribojimais (sąlygomis). Konstrukcijos saugumas užtikrinamas, taikant stiprumo ir stabilumo reikalavimus (matematinuose modeliuose tai pasiekama įvedant konstrukcijos elementų medžiagos takumo ir ribinės įrąžos ribojimų sąlygas (Liepa, Karkauskas 2012a)). Siekiant, jog optimali konstrukcija tenkintų tinkamumo ribinio būvio reikalavimus – optimizavimo matematinuose modeliuose įvedamos poslinkių (įlinkių) ribojimo sąlygos. Tačiau, iš optimizacijos uždavinio energinio principo apie ciklinės plastiškosios suirties metu išsklaidomos energijos minimumą, seka, jog liekamųjų įrąžų S_r tikrasis ir vienintelis pasiskirstymas yra tik konstrukcijos plastiškosios suirties metu. Ikisuiriminėje stadijoje tikrojo įtempių deformacijų būvio (IDB) nustatymui pasitelkiamas ekstreminis energinis papildomos energijos minimumo principas:

iš visų statiškai leistinų liekamųjų įrąžų vektorių S_r tikrasis yra tas, kuriam esant konstrukcijos prisitaikomumo būvio papildoma deformavimo energija yra minimali.

Netiesinių takumo sąlygų atveju ši energinį principą atitinka toks ekstreminio uždavinio matematinis modelis:

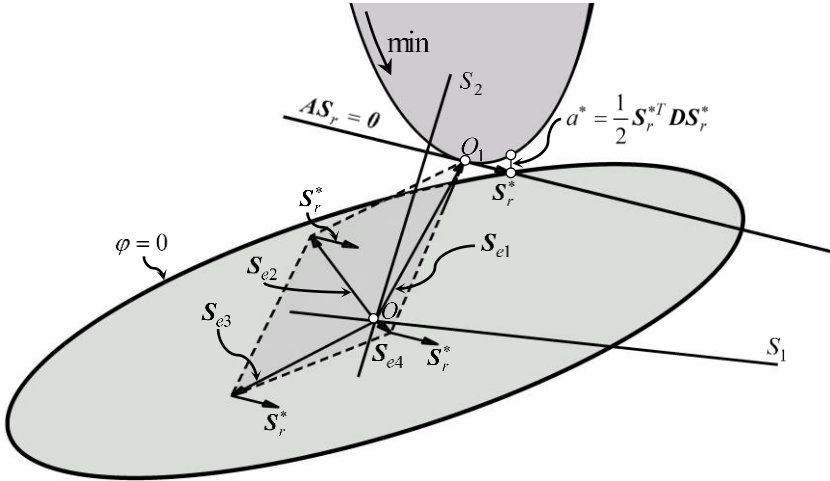
$$\text{rasti} \quad \min \left(\mathcal{F}'(S_r) = \frac{1}{2} S_r^T D S_r \right) = a^*, \quad (1.22)$$

$$\text{kai} \quad C - f_j(S_r + S_{ej}) \geq 0 \text{ visoms } j \in J, \quad (1.23)$$

$$A S_r = 0. \quad (1.24)$$

Čia $\mathcal{F}'(S_r)$ – funkcija išreiškianti papildomą deformavimo energiją liekamosiomis įrąžomis S_r . Uždavinys (1.22)–(1.24) yra iškiliojo matematinio programavimo uždavinys, todėl optimalus sprendinys yra vienintelis; tai – liekamųjų įrąžų vektorius S_r^* .

Uždavinį (1.22)–(1.24) galima paaiškinti pasitelkus grafinį jo atvaizdavimą (1.5 pav.) (Atkočiūnas 2012; Atkočiūnas, Karkauskas 2010). 1.5 paveiksle pa-vaizduotas uždavinio (1.22)–(1.24) optimalus sprendinys S_r^* , kai bent viena ta-kumo sąlyga yra tenkinama kaip griežta lygybė $\varphi_1 = C - f_1(S_r^* + S_{e1}) = 0$.



1.5 pav. Konstrukcijos prisitaikomumo būvio analizės uždavinio iliustracija
Fig. 1.5. Graphical illustration of analysis problem of structural shakedown state

1.3.2. Kinematinė analizės uždavinio formuluotė

Remiantis matematinio programavimo dualumo teorija (Bazaraa *et al.* 2006; Čyras 1969; Čyras, Atkočiūnas 1970), kinematinė analizės uždavinio (1.22)–(1.24) formuluotė užrašoma taip (Atkočiūnas, Karkauskas 2010):

$$\max_{\text{rasti}} \left\{ \mathcal{F}''(S_r, u_r, \lambda_j) = -\frac{1}{2} S_r^T D S_r - \sum_j \lambda_j^T [\nabla f_j(S_r + S_{ej})] S_r - \sum_j \lambda_j^T [C - f_j(S_r + S_{ej})] \right\} = a^*, \quad (1.25)$$

$$\text{kai} \quad D S_r + \sum_j [\nabla f_j(S_r + S_{ej})] \lambda_j - A^T u_r = 0, \quad (1.26)$$

$$\lambda_j \geq \mathbf{0} \text{ visoms } j \in J. \quad (1.27)$$

Čia $DS_r + \sum_j [\nabla f_j(S_r + S_{ej})] \lambda_j = \Theta_r$ – liekamosios deformacijos, o $\sum_j [\nabla f_j(S_r + S_{ej})] \lambda_j = \Theta_p$ – plastinė liekamųjų deformacijų dalis, taigi geometrinės lygtys (1.26), gali būti perrašomos deformacijomis: $\Theta_r - A^T u_r = \mathbf{0}$.

Uždavinio (1.25)–(1.27) optimalus sprendinys yra vektoriai $S_r^*, u_r^*, \lambda_j^*$. Sprendžiant kinematinę analizės uždavinį galima patikrinti liekamųjų įrašų vektorių, jis gaunamas toks pats kaip ir statinės formuluotės (1.22)–(1.24) atveju.

Pakeitus uždavinio (1.25)–(1.27) tikslo funkcijos ženklą, uždavinys atitinka pilnutinės potencinės energijos minimumo principą, kuris teigia, jog

iš visų statišškai leistinų liekamųjų poslinkių vektorių u_r tikrasis yra tas, kuriam esant konstrukcijos prisitaikomumo būvio pilnutinės potencinė energija yra minimali.

Tačiau konstrukciją etapais analizuojant atskiroms apkrovimo istorijoms nesunku pastebėti, jog u_r prisitaikymo būvyje gali būti nevienintelis. Seka, kad aptartų analizės uždavinių matematinių modelių trūkumas yra tai, jog jais negalima tiesiogiai įvertinti konstrukcijos pjūvių nusikrovimo. Jeigu analizuojant konstrukciją duotų apkrovų kitimo ribose, pradinuose apkrovimo etapuose jos pjūviai patyrė plastinį tekėjimą, o vėlesniuose apkrovimo etapuose plastinis tekėjimas fiksuojamas kituose konstrukcijos pjūviuose. Pateikti matematiniai modeliai buvusių plastinių deformacijų pradinuose etapuose negali įvertinti. Pasikeitusios plastinių deformacijų Θ_p vektoriaus reikšmės, sąlygoja skirtingus liekamųjų poslinkių vektorius.

1.3.3. Liekamųjų dydžių influentinės matricos

Analizės uždavinių (statinės ir kinematinės formuluočių) optimalius sprendinius $S_r^*, u_r^*, \lambda_j^*$, galima patikrinti sprendžiant Lagranžo lygčių sistemą. Ši sistema sudaroma pasitelkus Kuno ir Takerio (Khun – Tucker) sąlygas statinės formuluotės analizės uždavinio (1.22)–(1.24) sprendiniui S_r^* :

$$\nabla \mathcal{F}'(S_r^*) + \sum_j \lambda_j^T [\nabla f_j(S_r^* + S_{ej}^*)] \lambda_j - A^T u_r = \mathbf{0}, \quad (1.28)$$

$$\lambda_j^T [C - f_j(S_r^* + S_{ej}^*)] = 0, \quad (1.29)$$

$$\lambda_j \geq 0 \text{ visiems } j \in J. \quad (1.30)$$

Čia (1.28) yra geometrinės darnos lygtys, o (1.29) ir (1.30) sudaro matematinio programavimo griežtumo sąlygas.

Taigi analizės uždavinio statinės formuluotės matematinio modelio (1.22)–(1.24) apribojimai (1.23), (1.24) kartu su Kuno-Takerio sąlygomis (1.28)–(1.30) ir sudaro apibendrintąją Lagranžo lygčių sistemą:

$$AS_r = 0, \quad (1.31)$$

$$C - f_j(S_r + S_{ej}) \geq 0, \quad (1.32)$$

$$\Theta_r - A^T u_r = 0. \quad (1.33)$$

Sistemos (1.31)–(1.33) sprendinys yra S_r^* , u_r^* , λ_j^* , sutampa su statinės ir kinematinės analizės uždavinio formuluočių sprendiniais. Čia liekamosios įrašų S_r ir liekamieji poslinkiai u_r skaičiuojami pasitelkiant liekamųjų įrašų ir liekamųjų poslinkių influentines matricas, kai platinės deformacijos Θ_p yra žinomos:

$$S_r = \left\{ D^{-1} A^T (AD^{-1} A^T)^{-1} AD^{-1} - D^{-1} \right\} \Theta_p = \bar{G} \Theta_p, \quad (1.34)$$

$$u_r = (AD^{-1} A^T)^{-1} AD^{-1} \Theta_p = \bar{H} \Theta_p, \quad (1.35)$$

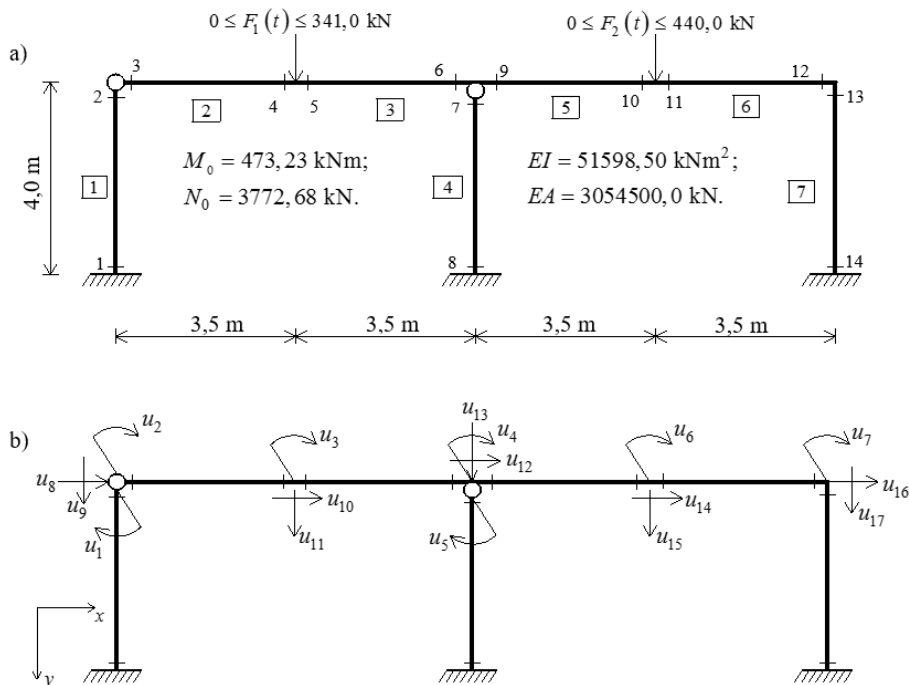
čia \bar{G} ir \bar{H} – atitinkamai liekamųjų įrašų ir liekamųjų poslinkių influentinės matricos.

1.3.4. Analizės uždavinio skaitinio sprendimo metodika

Šio poskyrio skaitiniu pavyzdžiu parodoma, jog analizuojant konstrukcijos pritaikymo būvius, pagal paskiras apkrovimo istorijas, liekamieji poslinkiai gali kisti nemonotoniškai.

Nagrinėjama žinomos geometrijos dviejų tarpatramių rėminė konstrukcija (1.6 pav.). Konstrukcijos elementų lenkiamasis standis EI ir ašinis standis EA yra žinomi (čia $E = 205 \text{ GPa}$ – plieno tamprumo modulis; $I = 25170 \text{ cm}^4$ – elemento skerspjūvio inercijos momentas; $A = 149 \text{ cm}^2$ – elemento skerspjūvio plotas). Elementų ribiniai lenkimo momentai $M_0 = f_y W_{pl}$ ir ribinės ašinės jėgos $N_0 = f_y A$ yra žinomos (čia $f_y = 253,2 \text{ MPa}$ – plieno takumo įtempiai; $W_{pl} = 1869 \text{ cm}^3$ – skerspjūvio platinis atsparumo momentas). Rėmas yra veikiamas kintamos kartotinės apkrovos, t. y. dviejų kintančių laike t sutelktųjų jėgų $F_1(t)$ ir $F_2(t)$, o jų kitimo ribos yra $0 \leq F_1(t) \leq 341,0 \text{ kN}$ ir

$0 \leq F_2(t) \leq 440,0 \text{ kN}$. Sprendžiamas prisitaikomumo analizės uždavinys (1.22)–(1.24): nustatoma, ar veikiant duotai apkrovai nagrinėjamas rėmas prisitaiko, jei taip randamos prisitaikomumo būvį užtikrinančios liekamosios įrašos S_r^* , platinės deformacijos θ_p^* ir liekamieji poslinkiai u_r^* .



1.6 pav. Konstrukcijos diskretinis modelis: a) skaičiuojamoji schema: (elementų numeriai yra pažymėti stačiakampiuose), b) galimų poslinkių krypčių schema (diskretinio modelio laisvumo laipsnis yra $m = 17$)

Fig. 1.6. A discrete model of a structure (element numbers are marked in rectangles): a) calculation scheme, b) scheme of possible nodal displacements directions (DOF $m = 17$)

Diskretinis modelis sudarytas konstrukciją suskaidžius į 7 baigtinius elementus ($k = 1, 2, \dots, s = 7, k \in K$), panaudojant 14 skaičiuojamųjų pjūvių ($i = 1, 2, \dots, \zeta = 14, i \in I$). Kiekvieno elemento mazginiame taške (pjūvyje) veikia trys įrašos: lenkimo momentas M ir ašinė jėga N (elemente ji pastovi). Tuomet bendras įrašų vektoriaus S komponentų skaičius yra $n = 21$:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= [\mathbf{S}_1 \quad \mathbf{S}_2 \quad \mathbf{S}_3 \quad \mathbf{S}_4 \quad \mathbf{S}_5 \quad \mathbf{S}_6 \quad \dots \quad \mathbf{S}_{19} \quad \mathbf{S}_{20} \quad \mathbf{S}_{21}]^T = \\ &= [\mathbf{M}_1 \quad \mathbf{M}_2 \quad \mathbf{N}_{\boxed{1}} \quad \mathbf{M}_3 \quad \mathbf{M}_4 \quad \mathbf{N}_{\boxed{2}} \quad \dots \quad \mathbf{M}_{13} \quad \mathbf{M}_{14} \quad \mathbf{N}_{\boxed{7}}]^T. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Rėmo pusiausvyros lygtys $\mathbf{AS} = \mathbf{F}$ sudaromos, pasitelkus pusiausvirosius baigtinius elementus: lygčių koeficientų matrica \mathbf{A} gaunama ($m = 17 \times n = 21$) matmenų. Liekamųjų įrašų vektorius \mathbf{S}_r taip pat turi 21 narį ir prisitaikomumo analizės uždavinio (1.22)–(1.24) pusiausvyros sąlygos (1.24) įgauna tradicinį pavidalą $\mathbf{AS}_r = \mathbf{0}$. Fizikinė kiekvieno matricos \mathbf{A} stulpelio prasmė nustatoma, pagal vektoriaus (1.36) struktūrą.

Tiesinės takumo sąlygos

$$\left. \begin{aligned} \textcircled{1} \quad & M_{ei} + M_{ri} - M_{oi} \leq 0, \\ \textcircled{2} \quad & M_{ei} / 1,18 + c_i N_{ei} + M_{ri} / 1,18 + c_i N_{ri} - M_{oi} \leq 0, \\ \textcircled{3} \quad & M_{ei} / 1,18 - c_i N_{ei} + M_{ri} / 1,18 - c_i N_{ri} - M_{oi} \leq 0, \\ \textcircled{4} \quad & -M_{ei} - M_{ri} - M_{oi} \leq 0, \\ \textcircled{5} \quad & -M_{ei} / 1,18 + c_i N_{ei} - M_{ri} / 1,18 + c_i N_{ri} - M_{oi} \leq 0, \\ \textcircled{6} \quad & -M_{ei} / 1,18 - c_i N_{ei} - M_{ri} / 1,18 - c_i N_{ri} - M_{oi} \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.37)$$

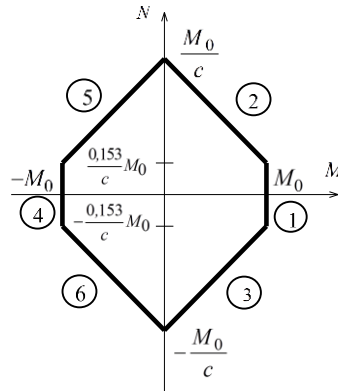
tikrinamos kiekviename i -tajame pjūvyje ($i \in I$). Formulėse (1.37) $c_i = M_{0i} / N_{0i}$. Įvedus pastovių baigtiniame elemente ribinių momentų šešiamatį vektorių $\mathbf{M}_{0i} = [M_{0i} \ M_{0i} \dots M_{0i}]^T$, (1.37) takumo sąlygos $\boldsymbol{\varphi}_i$ i -tajame pjūvyje užrašomos taip:

$$\boldsymbol{\varphi}_i = \boldsymbol{\Phi}_i (\mathbf{S}_{ei} + \mathbf{S}_{ri}) - \mathbf{M}_{0i} \leq \mathbf{0}. \quad (1.38)$$

Čia matrica $\boldsymbol{\Phi}_i$ kiekvienam i -tajam pjūviui užrašoma taip:

$$\boldsymbol{\Phi}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/1,18 & c_i \\ 1/1,18 & -c_i \\ -1 & 0 \\ -1/1,18 & c_i \\ -1/1,18 & -c_i \end{bmatrix}. \quad (1.39)$$

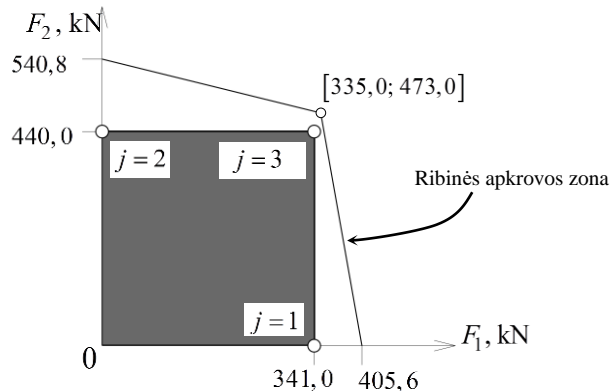
Grafiškai takumo sąlygos (1.37) pavaizduotas 1.7 paveiksle.



1.7 pav. Grafinis takumo sąlygų (1.37) vaizdas

Fig. 1.7. Graphic representation of linear yielding conditions (1.37)

Apkrovos vektoriaus komponentų skaičius atitinka rėmo diskretinio modelio laisvumo laipsnį m . Kai veikia mažiau nenulinių jėgų, patogų į apkrovos vektorių \mathbf{F} įjungti tik nenulinius komponentus, pvz., 1.6 paveiksle pavaizduoto rėmo atveju $\mathbf{F} = [F_1 \ F_2]^T$. Tai atlikus nagrinėjamą rėmą veikiančių jėgų $\mathbf{F}(t) = [F_1(t) \ F_2(t)]^T$ hodografo visos trys pagrindinės viršūnės j parodytos 1.8 paveiksle.



1.8 pav. Rėmą (1.6 pav.) veikiančių jėgų kitimo sritis

Fig. 1.8. Load subjected to the frame (Fig. 1.6) variation locus

Pirmoji apkrovos kombinacija $j=1$ įgalina užrašyti vektorių $F_1 = [341, 0 \ 0]^T$, antroji $j=2$ duoda $F_2 = [0 \ 440, 0]^T$ ir trečioji $j=3$ $F_3 = [341, 0 \ 440, 0]^T$. Pagal formulę (1.14), pasitelkus atitinkamus du matricos α stulpelius α_{1-2} , galima apskaičiuoti tamprųjų įrašų vektorius $S_{e1} = \alpha_{1-2} F_1$, $S_{e2} = \alpha_{1-2} F_2$ ir $S_{e3} = \alpha_{1-2} F_3$ (šios reikšmės pateiktos 1 lentelėje). Vidinių jėgų komponentų numeriai ir jų tipai pagal vektoriaus (1.36) struktūrą pateikti pirmuose dviejuose 1 lentelės stulpeliuose. Tampa aišku, kad nustatant rėmo gebėjimo prisitaikyti prie duotosios apkrovos faktą, takumo sąlygos (1.38) rašomos kiekvienai jėgų hodografo viršūnei $j, j \in J$:

$$\begin{cases} \varphi_{i,j=1} = \Phi_i(S_{ei,j} + S_{ri}) - M_{0i} \leq 0, \\ \varphi_{i,j=2} = \Phi_i(S_{ei,j} + S_{ri}) - M_{0i} \leq 0, \\ \varphi_{i,j=3} = \Phi_i(S_{ei,j} + S_{ri}) - M_{0i} \leq 0. \end{cases} \quad (1.40)$$

Analizės uždavinio sprendimo MATLAB'u pradžioje tampa aišku, kad egzistuoja bet koks statiskai leistinas liekamųjų įrašų vektorius S_r , t. y. rėmas prisitaiko prie apkrovų $0 \leq F_1 \leq 341,0 \text{ kN}$ ir $0 \leq F_2 \leq 440,0 \text{ kN}$ (nėra jokio ciklinio – plastinio suirimo atvejo). Optimalus analizės uždavinio (1.22)–(1.24) sprendinys S_r^* pateiktas 1.1 lentelėje. Dualaus uždavinio sprendiniai yra λ_j^* (arba Θ_p^* , žr. 1 lentelėje) ir u_r^* . Deformacijos Θ_p^* kiekviename pjūvyje skaičiuojamos pagal formulę (1.21) $\Theta_{pi}^* = \sum_j \Phi_i^T \lambda_{ij}^*, i \in I, j \in J$:

$$\Theta_p^* = \begin{bmatrix} \Theta_{p1}^* & \Theta_{p2}^* & \Theta_{p3}^* & \Theta_{p4}^* & \Theta_{p5}^* & \Theta_{p6}^* & \Theta_{p7}^* & \Theta_{p8}^* & \Theta_{p9}^* & \dots \\ \dots & \Theta_{p19}^* & \Theta_{p20}^* & \Theta_{p21}^* \end{bmatrix}^T. \quad (1.41)$$

Toliau glaustai analizuojami analizės uždavinio (1.22)–(1.24) sprendimo rezultatai. Pravartu S_r^* kontrolę susieti su formule (1.34) $S_r^* = \bar{G} \Theta_p^*$. Pagal (1.34) formulę gautos liekamosios įrašos S_r^* visiškai sutampa su optimaliu sprendiniu pateiktu 1.1 lentelėje. Liekamųjų įrašų influentinė matrica \bar{G} yra kvadratinė (pateikta B priede): jos eilutės atitinka įrašas pagal vektoriaus (1.36) struktūrą, o stulpeliai priderinti prie deformacijų vektoriaus (1.41) struktūros.

Reikia pažymėti, kad (1.34) formulė nėra vienintelis būdas patikrinti liekamasias įrašas S_r^* . Tai galima atlikti ir sprendžiant tokį ekstreminį uždavinį:

$$\text{rasti} \quad \min \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{S}_r^T \mathbf{D} \mathbf{S}_r + \mathbf{S}_r^T \boldsymbol{\Theta}_p^* \right\}, \quad (1.42)$$

$$\text{kai} \quad \mathbf{A} \mathbf{S}_r = \mathbf{0}. \quad (1.43)$$

Čia žinomas yra plastinių deformacijų vektorius $\boldsymbol{\Theta}_p^*$, o ieškomos liekamosios įrašos. Optimalus uždavinio (1.42)–(1.43) sprendinys yra liekamosios įrašos, kurios visiškai sutampa su pateiktosiomis 1 lentelėje.

Kaip minėta anksčiau analizės uždavinio (1.22)–(1.24) sprendimo rezultatas yra ir liekamieji poslinkiai \mathbf{u}_r^* , m :

$$\mathbf{u}_r^* = \begin{bmatrix} -0,0021 & -0,0002 & -5,20E-05 & 0,000392 & -0,00212 & -0,00997 \\ -0,00426 & -0,00561 & -1,60E-06 & -0,00563 & -0,00053 & -0,00564 \\ -1,70E-05 & -0,00568 & 0,025925 & -0,00571 & 1,88E-05 \end{bmatrix}^T.$$

Fizikinė poslinkių vektoriaus komponentų prasmė siejama su rėmo brėžiniu (1.6 pav.).

Pastaba A. 1.1 lentelėje ir kitose vietose toliau disertacijoje skaitinių eksperimentų rezultatai apvalinami laikantis bendro lentelės tikslumo (skaičių kiekis po kablelio vienodas visoje lentelėje). Skaičių kiekis po kablelio skirtingose lentelėse nebūtinai vienodas. Jeigu paskutinis skaičius po apalavimo yra nulis – jis nerašomas (išskyrus apkrovų reikšmes, kurios laikomos tikslomis).

Pastaba B. Skaitinių rezultatų nulinės reikšmės pateikiamos išlaikant sprendimo MATLAB'ų rezultatų formatą (pvz. 0; 4,88E-14; 1,41E-46; -1,7E-32). Taip siekiama išlaikyti rezultatų tikslumą dėl galimo ženklo pokyčio atliekant aritmetinius veiksmus.

Verta paminėti tai, kad, jeigu konstrukciją apkrautume kintama kartotinė apkrova etapais, t. y. pirmiausia paveiktume jėga $0 \leq F_1 \leq 341 \text{ kN}$, o po to pridėtume dar ir jėgą $0 \leq F_2 \leq 440 \text{ kN}$ (galiausiai konstrukciją veiktų ta pati jėgų pora kaip ir bendruoju atveju), tačiau liekamieji poslinkiai būtų gaunami kitokie. Tik atliekant etapinį skaičiavimą galima pastebėti, kad nuo jėgos $0 \leq F_1 \leq 341 \text{ kN}$ konstrukcija pasiekė prisitaikomumo būvį ir plastinė deformacija išsivystė tik 5-ajame pjūvyje (7-as vektoriaus $\boldsymbol{\Theta}_p$ komponentas) $\boldsymbol{\Theta}_{p,7} = 0,001389$, o liekamieji poslinkiai $u_{sup,11} = u_{e,11}^{max} + u_{r,11} = 0,0333 + 0,0019 = 0,0352 \text{ m}$ bei $u_{inf,11} = u_{e,11}^{min} + u_{r,11} = 0 + 0,0019 = 0,0019 \text{ m}$.

1.1 lentelė. Tamprios įrašos, kiekvienai apkrovos srities viršūnei ($j = 1, j = 2, j = 3$) ir rėmo (1.6 pav.) analizės uždavinio (1.22)–(1.24) rezultatai

Table 1.1. Elastic internal forces for each apex of load locus ($j = 1, j = 2, j = 3$) and results of analysis problem (1.22)–(1.24) for frame shown in Fig. 1.6

Nr.	Įrašas	$S_{e,j=1}$	$S_{e,j=2}$	$S_{e,j=3}$	S_r^*	Θ_p^*
1	M_1	–31,5251	123,946	92,42117	54,3023	0
2	M_2	0	0	0	0	0
3	$N_{\boxed{1}}$	–136,382	32,2406	–104,141	1,2455	0
4	M_3	0	4,88E–14	4,88E–14	0	0
5	M_4	–477,336	112,842	–364,494	4,35919	0
6	$N_{\boxed{2}}$	7,881286	–30,9866	–23,1053	–13,5756	0
7	M_5	477,336	–112,842	364,4938	–4,35919	0
8	M_6	238,8281	225,684	464,5124	8,71837	0
9	$N_{\boxed{3}}$	7,881286	–30,9866	–23,1053	–13,5756	0
10	M_7	–1,90E–14	4,88E–14	2,99E–14	–1,7E–32	0
11	M_8	–31,6999	124,633	92,93345	54,6033	0
12	$N_{\boxed{4}}$	–247,81	–248,806	–496,616	13,1388	0
13	M_9	–238,828	–225,684	–464,512	–8,7183	–0,00616
14	M_{10}	87,65557	–532,294	–444,639	59,0634	–0,01889
15	$N_{\boxed{5}}$	15,80626	–62,1449	–46,3387	–27,2264	0
16	M_{11}	–87,6556	532,2942	444,6386	–59,0634	0
17	M_{12}	–63,5169	249,7272	186,2103	109,408	0
18	$N_{\boxed{6}}$	15,80626	–62,1449	–46,3387	–27,226	0
19	M_{13}	63,51691	–249,727	–186,21	–109,408	0
20	M_{14}	–0,29188	1,147573	0,855694	0,5028	0
21	$N_{\boxed{7}}$	43,19214	–223,435	–180,243	–14,3843	0

Toliau pridėjus jėgą $0 \leq F_2 \leq 440$ kN, pastebime, kad 5-asis pjūvis nusikrovė $\Theta_{p,7} = 0$, naujos plastinės deformacijos atsirado 9-ame ir 10-ame pjūviuose (1.1 lentelė). Akivaizdu, kad turėsime ir naujus liekamuosius poslinkius $u_{sup,11} = u_{e,11}^{max} + u_{r,11} = 0,0333 + 0 = 0,0333$ m bei $u_{inf,11} = u_{e,11}^{min} + u_{r,11} = -0,0133 + 0 = -0,0133$ m. Matome, jog taikant analizės uždavinio matematinį

modelį (1.22)–(1.24) konstrukcijos analizei etapais, neįmanoma įvertinti nusikraunamųjų deformacijų ir liekamųjų poslinkių. O tai yra labai svarbu teisingam poslinkių ribų \mathbf{u}_{sup} ir \mathbf{u}_{inf} optimizacijos uždavinių matematiniuose modeliuose sudarymui.

1.4. Patikslintas optimizacijos uždavinio matematinis modelis

Šiame poskyryje pateikiamas ribinių įrašų, konstrukcijos elementuose, pasiskirstymo optimizacijos prisitaikomumo sąlygomis patikslintas matematinis modelis. Uždavinio formuluotė yra tokia:

kai žinomos išorinių apkrovų kitimo ribos $\mathbf{F}_{inf} \leq \mathbf{F}_j \leq \mathbf{F}_{sup}$, reikia rasti tokių ribinių įrašų \mathbf{S}_0 pasiskirstymą, kuris tenkintų uždavinio tikslo funkciją $\min f(\mathbf{S}_0)$ bei apribojimų (stiprumo ir standumo) sąlygas.

Netiesinių takumo sąlygų atveju, uždavinio formuluotę atitinkantis matematinis modelis yra toks (Alawdin *et al.* 2016; Atkočiūnas 1999; Atkočiūnas, Karkauskas 2010):

$$\min f(\mathbf{S}_0), \quad (1.44)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{S}_r = \mathbf{0}, \quad (1.45)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_j = \mathbf{C}(\mathbf{S}_0) - \mathbf{f}_j(\mathbf{S}_{ej}(\mathbf{S}_0) + \mathbf{S}_r) \geq \mathbf{0}, \quad (1.46)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{S}_0)\mathbf{S}_r + \boldsymbol{\Theta}_p(\mathbf{S}_0) - \mathbf{A}^T \mathbf{u}_r = \mathbf{0}, \quad (1.47)$$

$$\boldsymbol{\Theta}_p(\mathbf{S}_0) = \sum_j \left[\nabla \mathbf{f}_j(\mathbf{S}_{ej}(\mathbf{S}_0) + \mathbf{S}_r) \right]^T \boldsymbol{\lambda}_j, \quad (1.48)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_j^T \left[\mathbf{C}(\mathbf{S}_0) - \mathbf{f}_j(\mathbf{S}_{ej}(\mathbf{S}_0) + \mathbf{S}_r) \right] = 0, \quad (1.49)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_j \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\lambda}_j = [\lambda_{1j} \lambda_{2j} \dots \lambda_{\zeta j}]^T, \quad (1.50)$$

$$\mathbf{S}_0 \geq \mathbf{S}_{0,min}, \quad (1.51)$$

$$\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}_{ej}(\mathbf{S}_0) + \mathbf{u}_{r,inf}, \quad (1.52)$$

$$\mathbf{u}_{ej}(\mathbf{S}_0) + \mathbf{u}_{r,sup} \leq \mathbf{u}_{max}, \quad (1.53)$$

$$\mathbf{S}_{ej} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{S}_0)\mathbf{F}_j, \quad \mathbf{u}_{ej} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{S}_0)\mathbf{F}_j \text{ visiems } j \in J. \quad (1.54)$$

Čia nežinomieji yra vektoriai \mathbf{S}_0 , \mathbf{S}_r , \mathbf{u}_r ir $\boldsymbol{\lambda}_j$. Tikslo funkcija (1.44) gali išreikšti ribinių įrašų \mathbf{S}_0 pasiskirstymą arba tiesiogiai konstrukcijos tūrį

$\sum_k L_k A_k (S_{0k})$ (Atkočiūnas *et al.* 2015; Liepa, Karkauskas 2012b). Dėl nemonotoniško liekamųjų poslinkių kitimo matematiniam modelyje (1.44)–(1.54) įvedamos patikslintos standumo apribojimų sąlygos (1.52)–(1.53), kur ribos u_{min} ir u_{max} gali būti nustatomos pagal projektavimo normų reikalavimus (LST EN 1993-1-1:2005+AC:2006 2010).

Pateiktas matematinis modelis (1.44)–(1.54) yra tolydinio optimizavimo neiškilo matematinio programavimo uždavinys. Šio uždavinio daugiaekstremiškumas yra sąlygotas matematinio programavimo griežtumo sąlygų (1.49). Toks uždavinys sprendžiamas iteracijomis: pirmojoje iteracijoje gaunamas ribinių įrašų vektorius $S_0^{*(1)}$ prie pradinių duomenų (pirmojoje iteracijoje pasidavumo D matrica formuojama su pradiniais skerspjūvių parametrais). Antrosios iteracijos pradžioje suformuojama nauja pasidavumo matrica, perskaičius skerspjūvių parametrus pagal gautas ribines įrašas $S_0^{*(1)}$. Tada formuojamos naujos influentinės matricos įrašų α ir poslinkių β , kartu gaunami tamprios įrašos $S_{ej} = \alpha F_j$ bei poslinkiai $u_{ej} = \beta F_j$. Iteracinis skaičiavimas tęsiamas, kol skirtumas tarp dviejų paskutinių iteracijų tenkina nustatytą tikslumo kriterijų – tikslo funkcijų reikšmių skirtumą.

1.5. Pirmojo skyriaus išvados ir disertacijos uždavinių formulavimas

Analitinė literatūros analizė parodė, jog dabartiniai prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo uždaviniai nėra pakankamai išplėtoti ir kol kas tiesiogiai negali būti taikomi praktiniam plieninių ar gelžbetoninių konstrukcijų projektavimui. Išryškėjo, kad:

1. Nepakamai ištirtos Melano teoremos sąsajos su matematinio programavimo teorija.
2. Tinkamumo ribinio būvio sąlygų užrašymas šiuolaikiniuose optimizavimo uždavinių matematinuose modeliuose nėra tikslus.
3. Tobulintina liekamųjų poslinkių kitimo ribų nustatymo metodika.
4. Prisitaikomumo teorijos praktinio taikymo aspektai optimizuojant metalines ir gelžbetonines rėmines konstrukcijas nėra pakankamai išvystyti.

Atlikus ankstesnių tyrimų analizę, disertacijos tikslui pasiekti suformuluojami tokie uždaviniai:

1. Ištirti Melano teoremos sąsajas su matematinio programavimo teorija.
2. Sudaryti liekamųjų poslinkių skenavimo uždavinio matematinį modelį, integruoti jį į optimizavimo uždavinio matematinį modelį skaitiniais eksperimentais jį patikrinti.
3. Atskleisti prisitaikomumo teorijos taikymo galimybes, nagrinėjant plieninių ir gelžbetoninių konstrukcijų darbą.
4. Patikrinti ir įvertinti prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo uždavinių (neiškilo netiesinio matematinio programavimo) sprendinių kokybę.

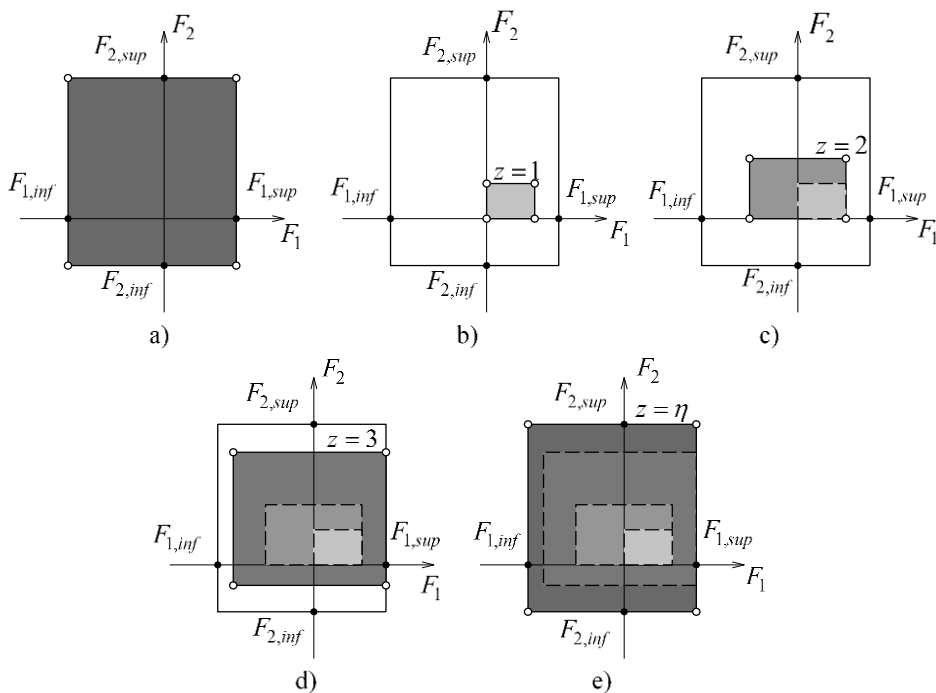
Melano teoremos interpretacija: skenavimo metodas liekamiesiems poslinkiams

Prisitaikančių rėminių konstrukcijų optimizavimo uždavinių matematiniuose modeliuose neišvengiamai naudojamos stiprumo (saugos ribinio būvio) ir standumo (tinkamumo ribinio būvio) sąlygos-apribojimai. Standumo sąlygose figūruoja plastinių deformacijų sąlygojami liekamieji poslinkiai. Idealiai tamprių plastinių konstrukcijų, veikiamų kintamos kartotinės apkrovos, prisitaikomumo proceso metu besivystantys liekamieji poslinkiai gali kisti nemonotoniškai. Todėl svarbu nustatyti liekamųjų poslinkių kitimo ribas (ypač tais atvejais, kai žinomos tik apkrovų kitimo ribos, o ne konkreti apkrovimo istorija). Šiame skyriuje pateikiamas Melano teoremos interpretacija grindžiamas liekamųjų poslinkių analizės skenavimo metodas. Skenavimo uždavinių matematiniai modeliai sudaromi pasitelkus ekstreminius energinius mechanikos principus bei matematinio programavimo teoriją. Skenuojant apkrovų sritis yra progresyviai plečiama, įmanoma nustatyti apatinę ir viršutinę liekamųjų poslinkių kitimo ribas.

Skyriaus tema disertacijos autorius yra paskelbęs keturis straipsnius (Liepa *et al.* 2014a, 2014b; Liepa, Gervytė 2015; Liepa *et al.* 2016).

2.1. Apkrovų srities skenavimas ir analizės uždavinys

Šiame skyriuje laikoma, kad konstrukcijos ribinės įrašos S_0 ir išorinių apkrovų kitimo ribos F_{inf}, F_{sup} yra žinomos. Disertacijoje sukurtas skenavimo metodas yra grindžiamas išorinių apkrovų veikimo srities (apribotos hodografu) plėtimu (2.1. pav.).



2.1. pav. Tipinė skenavimo procedūra: a) apkrovų kitimo sritis F_{inf}, F_{sup} ; b) 1-as skenavimo etapas; c) 2-as skenavimo etapas; d) 3-ias skenavimo etapas; e) η -asis skenavimo etapas (sugrįžimas į etapą „a“ – pilna apkrovų sritis)

Fig. 2.1. Typical scanning procedure: a) variation locus of load F_{inf}, F_{sup} ; b) 1st scanning stage; c) 2nd scanning stage; d) 3rd scanning stage; e) η -th scanning stage (returning to the stage “a”- full load locus)

Išorinių apkrovų kitimo srities skenavimo procedūra realizuojama per z ($z = 1, 2, \dots, \eta, z \in \mathbb{Z}$) etapų. Etapų skaičių z lemia norimas poslinkių vertinimo tikslumas. Kiekvienam skenavimo etapui z sudaroma nauja apkrovų kitimo sritis

\mathbf{F}_j^z ($j \in J^z$, $J^z \in J$), uždengianti (apimanti) ankstesnę apkrovų kitimo sritį \mathbf{F}_j^{z-1} ($j \in J^{z-1}$). Tuomet analizės uždavinį (1.22)–(1.24) sprendžiant etapais, kryptin-
gai nulemtais pasirinktos skenavimo procedūros, yra randami visi įmanomi pasi-
rinktos procedūros etapų plastinių deformacijų pasiskirstymai $\boldsymbol{\Theta}_p^z$. Svarbu pab-
rėžti tai, jog kiekvienas naujas skenavimo etapas nereikalauja naujų influentinių
matricių $\boldsymbol{\alpha}$ ir $\boldsymbol{\beta}$ sudarymo (to nebūtų galima išvengti inkrementiškai analizuojant
konkrečią apkrovimo $\mathbf{F}(t)$ istoriją).

Tamprios įrašos \mathbf{S}_{ej} ir tamprūs poslinkiai \mathbf{u}_{ej} kiekviename skenavimo pro-
cedūros etape z randami atitinkamai:

$$\mathbf{S}_{ej}^z = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{F}_j^z, \quad \mathbf{u}_{ej}^z = \boldsymbol{\beta} \mathbf{F}_j^z, \quad \text{visiems } j \in J^z, \quad z \in Z. \quad (2.1)$$

Skenavimo procedūroje taikant (2.1) formulę $\mathbf{S}_{ej}^z = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{F}_j^z$, analizės uždavinys
(1.22)–(1.24) kiekvienam skenavimo etapui z ($z \in Z$) gali būti užrašomas taip:

$$\text{rasti} \quad \min \left(\mathcal{F}'(\mathbf{S}_r^z) = \frac{1}{2} \mathbf{S}_r^{zT} \mathbf{D} \mathbf{S}_r^z \right) = a^{z*}, \quad (2.2)$$

$$\text{kai} \quad \mathbf{A} \mathbf{S}_r^z = \mathbf{0}, \quad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_j^z = \mathbf{C} - \mathbf{f}_j(\mathbf{S}_{ej}^z + \mathbf{S}_r^z) \geq \mathbf{0}, \quad \text{visiems } j \in J^z, \quad z \in Z. \quad (2.4)$$

Uždavinio (2.2)–(2.4) optimalus sprendinys yra etapo z ($z \in Z$) liekamųjų
įrašų vektorius \mathbf{S}_r^{z*} . Uždavinį (2.2)–(2.4) atitinkančio dualaus uždavinio (dualaus
uždavinio matematinis modelis pateiktas 2.2.2 poskyryje) sprendinys yra plastinių
deformacijų vektorius $\boldsymbol{\Theta}_p^{z*}$ ir liekamųjų poslinkių vektorius \mathbf{u}_r^{z*} . Taikant lieka-
mųjų dydžių influentines matricas $\bar{\mathbf{G}}$ ir $\bar{\mathbf{H}}$ (formulės 1.34, 1.35), nesunku pa-
tikrinti tiesioginio ir dualaus uždavinio rezultatų suderinamumą: $\mathbf{S}_r^{z*} = \bar{\mathbf{G}} \boldsymbol{\Theta}_p^{z*}$ ir
 $\mathbf{u}_r^{z*} = \bar{\mathbf{H}} \boldsymbol{\Theta}_p^{z*}$. Todėl, uždavinio (2.2)–(2.4) etapo $z = \eta$ sprendinys \mathbf{S}_r^{z*} visiškai
atitinka optimalų uždavinio (1.22)–(1.24) sprendinį \mathbf{S}_r^* . Matematinis modelis
(2.2)–(2.4) pasirinktos skenavimo strategijos ribose leidžia nustatyti galimą
skerspįvių nusikrovimo faktą. Modelis (2.2)–(2.4) sudarytas Melano teoremos
pagrindu, interpretuojant ją apkrovų srities skenavimo etapams.

2.2. Nauja liekamųjų poslinkių nustatymo metodologija

2.2.1. Skenavimo uždavinys liekamųjų įrašų prieaugiams

Šiuo atveju, analizės uždavinys (2.2)–(2.4) įvedamas kintamųjų pakeitimas $S_r^z = S_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta S_r^z$, čia ΔS_r^z yra liekamųjų įrašų S_r prieaugių vektorius kiekviename skenavimo etapo z ($z \in Z$) pabaigoje. Kitaip tariant prieaugiai ΔS_r^z yra sukelti apkrovos pokyčių pereinant iš F_j^{z-1} ($z-1$ etape) į F_j^z (z etapo pabaigoje). Toliau liekamųjų įrašų vektorius S_r^z bus žymimas $S_{r\Sigma}^z$ ($S_r^z \equiv S_{r\Sigma}^z$), pabrėžiant sumavimo procedūrą. Tuo pačiu, $S_{r\Sigma}^{z-1}$ yra suma liekamųjų įrašų prieaugių, gautų ankstesniuose etapuose, prieš z -tojo skenavimo etapo pradžią:

$$S_{r\Sigma}^{z-1} = \Delta S_r^0 + \Delta S_r^1 + \dots + \Delta S_r^{z-1} = \sum_z \Delta S_r^{z-1}. \quad (2.5)$$

Kai $z=1$ pradiniai prieaugiai yra $\Delta S_r^0 = \mathbf{0}$ ir, suprantama, $S_{r\Sigma}^0 = \mathbf{0}$. Tuomet kiekvienam kitam skenavimo etapui z ($z \in Z$), panaudojant tamprių įrašų skaičiavimo formulę $S_{ej}^z = \alpha F_j^z$ (2.1), analizės uždavinio matematinis modelis gali būti užrašomas taip:

$$\text{rasti } \min \left(\mathcal{F}' \left(S_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta S_r^z \right) = \frac{1}{2} \left(S_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta S_r^z \right)^T D \left(S_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta S_r^z \right) \right) = a^{z*}, \quad (2.6)$$

$$\text{kai} \quad A \Delta S_r^z = \mathbf{0}, \quad (2.7)$$

$$\varphi_j^z = C - f_j \left(S_{r\Sigma}^{z-1} + S_{ej}^z + \Delta S_r^z \right) \geq \mathbf{0}, \text{ visiems } j \in J^z, \quad z \in Z. \quad (2.8)$$

Optimalus uždavinio (2.6)–(2.8) sprendinys yra liekamųjų įrašų prieaugių vektorius ΔS_r^{z*} . Atsižvelgiant į formulę (2.5), galima pastebėti, jog komponentai $\Delta S_r^1, \Delta S_r^2, \dots, \Delta S_r^{z-1}$ yra atskirų skenavimo procedūros etapų optimalūs sprendiniai $\Delta S_r^{1*}, \Delta S_r^{2*}, \dots, \Delta S_r^{(z-1)*}$. Liekamosios įrašos $S_r^{z*} = S_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta S_r^{z*}$ yra gaunamos skenavimo procedūros kiekvieno etapo pabaigoje ir visiškai sutampa su skenavimo uždavinio (2.2)–(2.4) optimaliu sprendiniu tame pačiame etape.

Skenavimo uždavinio formuluotės (2.6)–(2.8) privalumas yra tas, kad liekamųjų įrašų prieaugiai ΔS_r^z (tuo pačiu ir plastinių deformacijų prieaugiai $\Delta \Theta_p^z$, pasitelkiant dualų uždavinį) yra gaunami iš karto kaip optimalus sprendinys kiekviename skenavimo procedūros etape. Dualaus uždavinio sudarymas detalizuotas 2.2.2 poskyryje.

2.2.2. Dualus skenavimo uždavinys liekamiesiems poslinkiams

Pasitelkiant matematinio programavimo dualumo teorijos išvadas sudaromas uždavinį (2.6)–(2.8) atitinkančio dualaus uždavinio matematinis modelis.

Tiesioginio uždavinio (2.6)–(2.8) Lagranžo funkcionalas yra toks:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Delta S_r^z, \lambda_j^z, u_r^z) = & \frac{1}{2} \left(S_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta S_r^z \right)^T D \left(S_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta S_r^z \right) - \\ & - \lambda_j^{zT} \left(C - f_j \left(S_{r\Sigma}^{z-1} + S_{ej}^z + \Delta S_r^z \right) \right) - u_r^{zT} A \left(S_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta S_r^z \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Diferencijuojant Lagranžo funkcionalą (2.9) pagal tiesioginio uždavinio (2.6)–(2.8) kintamąjį ΔS_r^z ir prilyginus gautą išvestinę nuliui, gaunamos dualaus uždavinio apribojimų sąlygos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{L}(\Delta S_r^z, \lambda_j^z, u_r^z)}{\partial \Delta S_r^z} = \\ & = D \left(S_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta S_r^z \right) + \left[\frac{\partial f_j \left(S_{r\Sigma}^{z-1} + S_{ej}^z + \Delta S_r^z \right)}{\partial \left(S_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta S_r^z \right)} \right] \lambda_j^z - A^T u_r^z = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Transponavus abi (2.10) lygties puses ir pasitelkus formulę (1.21) galima parašyti, kad

$$\begin{aligned} u_r^{zT} A \left(S_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta S_r^z \right)^T D - \lambda_j^{zT} \left[\frac{\partial f_j \left(S_{r\Sigma}^{z-1} + S_{ej}^z + \Delta S_r^z \right)}{\partial \left(S_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta S_r^z \right)} \right]^T = \\ = \left(S_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta S_r^z \right)^T D - \lambda_j^{zT} \left[\nabla f_j \left(S_{r\Sigma}^{z-1} + S_{ej}^z + \Delta S_r^z \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Priklausomumą $u_r^{zT} A$ (2.11) įrašius į formulę (2.9), gaunama nauja Lagranžo funkcijos išraiška:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Delta \mathbf{S}_r^z, \lambda_j^z) = & \frac{1}{2} \left(\mathbf{S}_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta \mathbf{S}_r^z \right)^T \mathbf{D} \left(\mathbf{S}_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta \mathbf{S}_r^z \right) - \\ & - \lambda_j^{zT} \left(\mathbf{C} - \mathbf{f}_j \left(\mathbf{S}_{r\Sigma}^{z-1} + \mathbf{S}_{ej}^z + \Delta \mathbf{S}_r^z \right) \right) - \left(\mathbf{S}_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta \mathbf{S}_r^z \right)^T \mathbf{D} \left(\mathbf{S}_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta \mathbf{S}_r^z \right) - \\ & - \lambda_j^{zT} \left[\nabla \mathbf{f}_j \left(\mathbf{S}_{r\Sigma}^{z-1} + \mathbf{S}_{ej}^z + \Delta \mathbf{S}_r^z \right) \right] \left(\mathbf{S}_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta \mathbf{S}_r^z \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Sutvarkius Lagranžo funkcionalą galima užrašyti tiesioginiam uždaviniui (2.6)–(2.8) dualaus uždavinio matematinį modelį:

$$\begin{aligned} \text{rasti} \quad \max \quad & - \frac{1}{2} \left(\mathbf{S}_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta \mathbf{S}_r^z \right)^T \mathbf{D} \left(\mathbf{S}_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta \mathbf{S}_r^z \right) - \\ & - \lambda_j^{zT} \left(\mathbf{C} - \mathbf{f}_j \left(\mathbf{S}_{r\Sigma}^{z-1} + \mathbf{S}_{ej}^z + \Delta \mathbf{S}_r^z \right) \right) - \\ & - \lambda_j^{zT} \left[\nabla \mathbf{f}_j \left(\mathbf{S}_{r\Sigma}^{z-1} + \mathbf{S}_{ej}^z + \Delta \mathbf{S}_r^z \right) \right] \left(\mathbf{S}_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta \mathbf{S}_r^z \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\text{kai} \quad \mathbf{D} \left(\mathbf{S}_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta \mathbf{S}_r^z \right) + \left[\nabla^T \mathbf{f}_j \left(\mathbf{S}_{r\Sigma}^{z-1} + \mathbf{S}_{ej}^z + \Delta \mathbf{S}_r^z \right) \right] \lambda_j^z - \mathbf{A}^T \mathbf{u}_r^z = \mathbf{0}, \quad (2.14)$$

$$\lambda_j^z \geq \mathbf{0}, \quad \text{visiems } j \in J^z, \quad z \in Z. \quad (2.15)$$

Taip gaunamas optimalus sprendinys yra $\Delta \mathbf{S}_r^{z*}, \lambda_j^{z*}, \mathbf{u}_r^{z*}$. Plastinių deformacijų vektorius

$$\boldsymbol{\theta}_p^{z*} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}_j \left(\mathbf{S}_{r\Sigma}^{z-1} + \mathbf{S}_{ej}^z + \Delta \mathbf{S}_r^z \right)}{\partial \left(\mathbf{S}_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta \mathbf{S}_r^z \right)} \right] \lambda_j^z = \left[\nabla^T \mathbf{f}_j \left(\mathbf{S}_{r\Sigma}^{z-1} + \mathbf{S}_{ej}^z + \Delta \mathbf{S}_r^z \right) \right] \lambda_j^z. \quad (2.16)$$

Pritaikius formules (1.34) ir (1.35) nesunku patikrinti ryši tarp gautų sprendinių: $\mathbf{S}_r^{z*} = \mathbf{S}_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta \mathbf{S}_r^{z*} = \bar{\mathbf{G}} \boldsymbol{\theta}_p^{z*}$ ir $\mathbf{u}_r^{z*} = \bar{\mathbf{H}} \boldsymbol{\theta}_p^{z*}$.

Uždavinys (2.13)–(2.15) išreiškia z etapo liekamųjų deformacijų $\boldsymbol{\theta}_r^z$, kurios susideda iš tampriosios dalies $\boldsymbol{\theta}_{rej}^z = \mathbf{D} \left(\mathbf{S}_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta \mathbf{S}_r^z \right)$ ir plastinės dalies $\boldsymbol{\theta}_p^{z*}$ darną.

2.3. Plastinių deformacijų prieaugių skaitinis nustatymas

Plastinių deformacijų prieaugių nustatymo skenavimo procedūra iliustruojama analizuojant pasirinktos geometrijos rėminę konstrukciją (1.6 pav.) (diskretizaciją

žr. 1.3.4. poskyryje). Sprendžiamas analizės uždavinio matematinis modelis (2.6)–(2.8), kai konstrukcija yra apkrauta kintama–kartotinė apkrova $0 \leq F_1(t) \leq 341,0 \text{ kN}$ ir $0 \leq F_2(t) \leq 440,0 \text{ kN}$. Atliekami keturi skenavimo etapai $z=1, 2, \dots, \eta=4$. Pažymėtina, jog etapui $z=1$ vektoriai $\Delta S_r^0 = \mathbf{0}$ ir $S_{r\Sigma}^0 = \mathbf{0}$. Pirmajame etape ($z=1$) konstrukciją veikia tik viena galima apkrovų kombinacija $\mathbf{F}_{j=1}^{z=1} = [341, 0 \quad 0]^T$. Antrajame etape ($z=2$) konstrukciją veikia trys galimos apkrovų kombinacijos (žr. 2.1 lentelės atvejį $z=2$): pirmoji kombinacija $j=1$ leidžia užrašyti vektorių $\mathbf{F}_{j=1}^{z=2} = [341, 0 \quad 0]^T$; antroji apkrovų kombinacija $j=2$ duoda $\mathbf{F}_{j=2}^{z=2} = [0 \quad 398, 3159]^T$; trečioji galima apkrovų kombinacija $j=3$ yra tokia $\mathbf{F}_{j=3}^{z=2} = [341, 0 \quad 398, 3159]^T$. Žinant apkrovų kombinacijų vektorius, pagal formules (2.1) nesunku nustatyti etapo z tampriąsias įrašas S_{ej}^z kiekvienos kombinacijos atveju j (šie rezultatai pateikiami 2.1 lentelėje).

Verta paminėti tai, kad atskiruose etapuose apkrovų kitimo ribos yra pasirinktos neatsitiktinai, o siekiant išryškinti plastinių deformacijų palaipsninį kitimą skirtinguose konstrukcijos pjūviuose (siekiant nepraleisti skerspjūvių apkrovimo–nusikrovimo fazių). Kitaip tariant, fiksuojamas plastinių deformacijų vystymasis nuo nenulinės reikšmės iki nulinės (nusikrovimo fenomenas) ir atitinkamai jų augimas nuo nulio iki galutinės reikšmės (kai nenusikrauna). Tokios apkrovų kitimo ribos gali būti nustatomos, pavyzdžiui, sprendžiant analizės uždavinį (2.2)–(2.4) ir fiksuojant apkrovas, prie kurių vyksta plastinių deformacijų persiskirstymas.

2.2 lentelėje pateikti skenavimo uždavinio (2.6)–(2.8) rezultatai kiekvienam skenavimo proceso etapui. Iš 2.2 lentelės matyti, kad pirmame skenavimo etape $z=1$ plastinės deformacijos $\Theta_{p7}^{(z=1)} = 0,001389$ atsirado 5-ame pjūvyje (7-asis deformacijų vektoriaus komponentas). Tuo tarpu, jeigu iš karto būtų vykdomas etapas $z=2$, plastinės deformacijos $\Theta_{p14}^{(z=2)} = -0,001886$ atsirastų tik 10-ame pjūvyje (14-asis deformacijų vektoriaus komponentas): būtų net nežinoma, jog 5-ame pjūvyje galėjo būti plastinės deformacijos $\Theta_{p7} = 0,001389$. Taigi, užfiksuojamas faktas, kad 5-atsis pjūvis nusikrovė.

Vykdam etapą $z=3$, toliau vystėsi plastinė deformacija 10-ame pjūvyje $\Theta_{p14}^{(z=3)} = -0,00539$ ir atsirado pradinė plastinė deformacija 9-ame pjūvyje $\Theta_{p13}^{(z=3)} = -8,60E-09$. Etapo $z=4$ pabaigoje gaunamos liekamosios įrašos $S_{r\Sigma}^{(z=4)}$, visiškai sutampančios su 1.3.4 poskyrio rezultatais (1.1 lentelė).

Toliau parodoma, jog galima nustatyti tikrąsias plastines deformacijas, kiekviename etape neignoruoiant nusikrovimo, t. y. įvertinant pirmojo etapo ($z=1$) deformacijų įtaką tolimesnių skenavimo etapų rezultatams. 2.3 lentelėje pateiktos tikrųjų plastinių deformacijų reikšmės $\tilde{\Theta}_p^{(z)}$ bei jas įtakančių suminių liekamųjų įrašų $\tilde{S}_{r\Sigma}^{(z)}$ reikšmės.

Išsamiau paaiškinamas 2.3 lentelės tikrųjų plastinių deformacijų $\tilde{\Theta}_p^{(z)}$, išliekančių ir po skerspjūvio nusikrovimo, nustatymas kiekviename skenavimo etape. Šio metodo principinė schema pavaizduota 2.2 paveiksle.

Įvykdžius $z=2$ skenavimo etapą pastebima, kad 5-as pjūvis nusikrovė: takumo sąlyga nepažeista (tenkinama kaip griežta nelygybė, B priedas), tačiau pirmajame etape $z=1$ pasireiškusi plastinė deformacija $\Theta_{p7}^{(z=1)} = 0,001389$ konstrukcijoje išlieka ir etapui $z=2$. Tuo tarpu, 2.2 lentelėje pateiktas plastinių deformacijų vektorius $\Theta_p^{(z=2)}$ turi tik vieną komponentą $\Theta_{p14}^{(z=2)} = -0,001886$. Atliekamas šios deformacijos perskaičiavimas, įvertinant nusikrovimą: t. y. reikia rasti tikrąjį plastinių deformacijų komponentą $\tilde{\Theta}_{p\mu}^{(z=2)}$, kur $\mu=14$ – keturioliktas vektoriaus $\Theta_p^{(z=2)}$ komponentas, įvertinant $z=2$ etape nusikrovusią deformaciją $\tilde{\Theta}_{p\eta}^{(z=2)} = \Theta_{p7}^{(z=1)} = 0,001389$ (iš čia $\eta=7$).

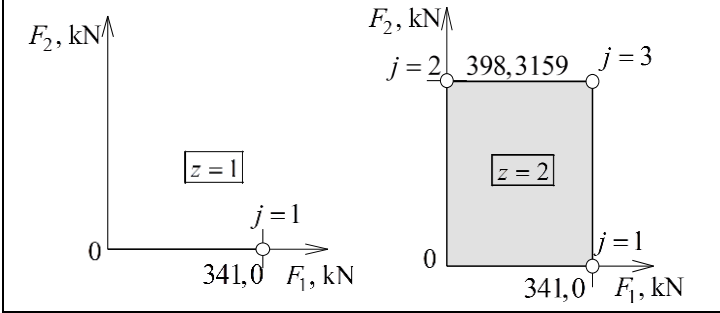
Sudaromos lygtys prisilaikant tokios komponentų parinkimo metodikos: imamas narys iš liekamųjų įrašų influentinės matricos \bar{G} (B priedas), esantis (μ) eilutėje ir (η) stulpelyje: $\bar{G}(\mu, \eta)$, bei narys iš vektoriaus $S_{r\Sigma}^{(z=2)}$ (2.3 lentelė) esantis (μ) komponento padėtyje: $S_{r\Sigma\mu}^{(z=2)}$:

$$\bar{G}(14, 7) \cdot \Theta_{p7}^{(z=1)} + \bar{G}(14, 14) \cdot \tilde{\Theta}_{p14}^{(z=2)} = S_{r\Sigma 14}^{(z=2)}. \quad (2.17)$$

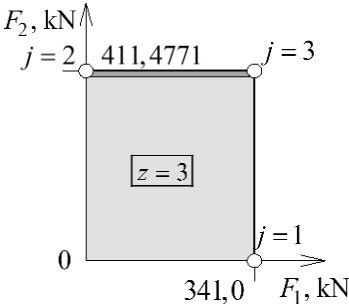
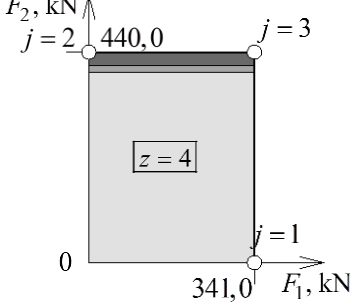
Kitaip tariant, perskaičiavus $\Theta_{p14}^{(z=2)}$ ir nustačius tikrąjį komponentą $\tilde{\Theta}_{p14}^{(z=2)}$, įvertinama nusikrovusių plastinių deformacijų $\Theta_{p7}^{(z=1)}$ įtaka liekamajai įrašai $S_{r\Sigma 14}^{(z=2)}$ etape $z=2$.

2.1 lentelė. Tamprių įrašų nuo visų apkrovų kombinacijų (viršūnių $j = 1, 2, 3, j \in J$) radimas, skenavimo procedūros eigos detalizavimas

Table 2.1. Finding of elastic internal forces at each load combination (apex $j = 1, 2, 3, j \in J$), the detalization of the progress of scanning procedure

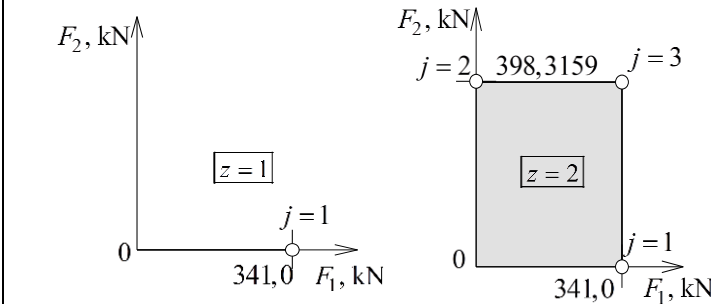
Tampriųjų įrašų vektorių komponentai	Tampriosios įrašos tipas				
		$S_{e,j=1}^{(z=1)}$	$S_{e,j=1}^{(z=2)}$	$S_{e,j=2}^{(z=2)}$	$S_{e,j=3}^{(z=2)}$
S_{e1}	M_{e1}	-31,5251	-31,5251	112,2041	80,67892
S_{e2}	M_{e2}	0	0	0	0
S_{e3}	$N_{e\boxed{1}}$	-136,382	-136,382	29,18626	-107,195
S_{e4}	M_{e3}	0	0	4,42E-14	4,42E-14
S_{e5}	M_{e4}	-477,336	-477,336	102,1519	-375,184
S_{e6}	$N_{e\boxed{2}}$	7,881286	7,881286	-28,051	-20,1697
S_{e7}	M_{e5}	477,336	477,336	-102,152	375,1841
S_{e8}	M_{e6}	238,8281	238,8281	204,3038	443,1319
S_{e9}	$N_{e\boxed{3}}$	7,881286	7,881286	-28,051	-20,1697
S_{e10}	M_{e7}	-1,90E-14	-1,90E-14	4,42E-14	2,53E-14
S_{e11}	M_{e8}	-31,6999	-31,6999	112,826	81,12611
S_{e12}	$N_{e\boxed{4}}$	-247,81	-247,81	-225,235	-473,045
S_{e13}	M_{e9}	-238,828	-238,828	-204,304	-443,132
S_{e14}	M_{e10}	87,65557	87,65557	-481,866	-394,211
S_{e15}	$N_{e\boxed{5}}$	15,80626	15,80626	-56,2575	-40,4513
S_{e16}	M_{e11}	-87,6556	-87,6556	481,8665	394,2109
S_{e17}	M_{e12}	-63,5169	-63,5169	226,0689	162,552
S_{e18}	$N_{e\boxed{6}}$	15,80626	15,80626	-56,2575	-40,4513
S_{e19}	M_{e13}	63,51691	63,51691	-226,069	-162,552
S_{e20}	M_{e14}	-0,29188	-0,29188	1,038856	0,746976
S_{e21}	$N_{e\boxed{7}}$	43,19214	43,19214	-202,267	-159,075

2.1 lentelės pabaiga
End of table 2.1

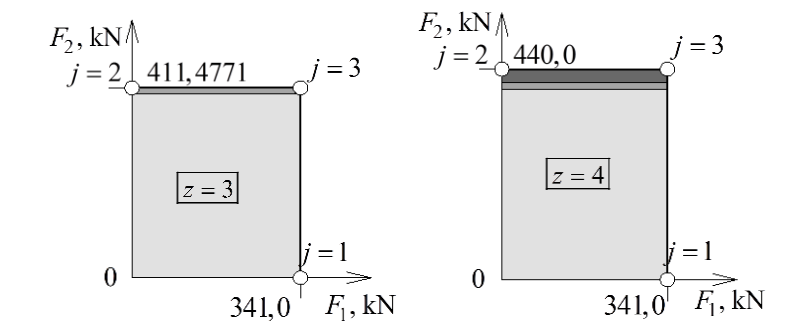
Tamprių irąžų vektorių komponentai	Tampriosios irąžos tipas						
		$S_{e,j=1}^{(z=3)}$	$S_{e,j=2}^{(z=3)}$	$S_{e,j=3}^{(z=3)}$	$S_{e,j=1}^{(z=4)}$	$S_{e,j=2}^{(z=4)}$	$S_{e,j=3}^{(z=4)}$
S_{e1}	M_{e1}	-31,5251	-31,5251	-31,5251	112,2041	80,67892	-31,5251
S_{e2}	M_{e2}	0	0	0	0	0	0
S_{e3}	$N_{e[1]}$	-136,382	-136,382	-136,382	29,18626	-107,195	-136,382
S_{e4}	M_{e3}	0	0	0	4,42E-14	4,42E-14	0
S_{e5}	M_{e4}	-477,336	-477,336	-477,336	102,1519	-375,184	-477,336
S_{e6}	$N_{e[2]}$	7,881286	7,881286	7,881286	-28,051	-20,1697	7,881286
S_{e7}	M_{e5}	477,336	477,336	477,336	-102,152	375,1841	477,336
S_{e8}	M_{e6}	238,8281	238,8281	238,8281	204,3038	443,1319	238,8281
S_{e9}	$N_{e[3]}$	7,881286	7,881286	7,881286	-28,051	-20,1697	7,881286
S_{e10}	M_{e7}	-1,90E-14	-1,90E-14	-1,90E-14	4,42E-14	2,53E-14	-1,90E-14
S_{e11}	M_{e8}	-31,6999	-31,6999	-31,6999	112,826	81,12611	-31,6999
S_{e12}	$N_{e[4]}$	-247,81	-247,81	-247,81	-225,235	-473,045	-247,81
S_{e13}	M_{e9}	-238,828	-238,828	-238,828	-204,304	-443,132	-238,828
S_{e14}	M_{e10}	87,65557	87,65557	87,65557	-481,866	-394,211	87,65557
S_{e15}	$N_{e[5]}$	15,80626	15,80626	15,80626	-56,2575	-40,4513	15,80626
S_{e16}	M_{e11}	-87,6556	-87,6556	-87,6556	481,8665	394,2109	-87,6556
S_{e17}	M_{e12}	-63,5169	-63,5169	-63,5169	226,0689	162,552	-63,5169
S_{e18}	$N_{e[6]}$	15,80626	15,80626	15,80626	-56,2575	-40,4513	15,80626
S_{e19}	M_{e13}	63,51691	63,51691	63,51691	-226,069	-162,552	63,51691
S_{e20}	M_{e14}	-0,29188	-0,29188	-0,29188	1,038856	0,746976	-0,29188
S_{e21}	$N_{e[7]}$	43,19214	43,19214	43,19214	-202,267	-159,075	43,19214

2.2 lentelė. Liekamųjų suminių įrašų ir jų prieaugių skenavimo procedūros (pagal analizės uždavinį (2.6)–(2.8)) eigos detalizavimas

Table 2.2. Detailization of the scanning procedure of residual total internal forces and their increments (according to analysis problem (2.6)–(2.8))

Liekamųjų įrašų vektorių komponentai	Liekamosios įrašos tipas							
		$S_r^{(z=0)}$	$\Delta S_r^{(z=1)}$	$\theta_p^{(z=1)}$	$S_r^{(z=1)}$	$\Delta S_r^{(z=2)}$	$\theta_p^{(z=2)}$	$S_r^{(z=2)}$
S_{r1}	M_{r1}	0	-1,09022	0	-1,09022	5,587379	0	4,49715
S_{r2}	M_{r2}	0	-2,90E-33	0	-2,90E-33	-2,30E-33	0	1,41E-46
S_{r3}	$N_{r[1]}$	0	1,172906	0	1,172906	1,57E-05	0	1,172922
S_{r4}	M_{r3}	0	2,85E-33	0	2,85E-33	1,21E-32	0	-1,10E-40
S_{r5}	M_{r4}	0	4,105172	0	4,105172	5,50E-05	0	4,105228
S_{r6}	$N_{r[2]}$	0	0,272556	0	0,272556	-1,39684	0	-1,12429
S_{r7}	M_{r5}	0	-4,10517	0,001389	-4,10517	-5,50E-05	0	-4,10523
S_{r8}	M_{r6}	0	8,210345	0	8,210345	0,00011	0	8,210457
S_{r9}	$N_{r[3]}$	0	0,272556	0	0,272556	-1,39684	0	-1,12429
S_{r10}	M_{r7}	0	0	0	0	6,19E-33	0	-6,20E-33
S_{r11}	M_{r8}	0	-1,09626	0	-1,09626	5,61835	0	4,522077
S_{r12}	$N_{r[4]}$	0	-2,65961	0	-2,65961	1,608176	0	-1,05144
S_{r13}	M_{r9}	0	-8,21034	0	-8,21034	-0,00011	0	-8,21046
S_{r14}	M_{r10}	0	3,006881	0	3,006881	5,62878	-0,001886	8,635661
S_{r15}	$N_{r[5]}$	0	0,546622	0	0,546622	-2,80143	0	-2,25481
S_{r16}	M_{r11}	0	-3,00688	0	-3,00688	-5,62878	0	-8,63566
S_{r17}	M_{r12}	0	-2,19658	0	-2,19658	11,25745	0	9,060866
S_{r18}	$N_{r[6]}$	0	0,546622	0	0,546622	-2,80143	0	-2,25481
S_{r19}	M_{r13}	0	2,196582	0	2,196582	-11,2575	0	-9,06087
S_{r20}	M_{r14}	0	-0,01009	0	-0,01009	0,051722	0	0,041639
S_{r21}	$N_{r[7]}$	0	1,486704	0	1,486704	-1,60819	0	-0,12149

2.2 lentelės pabaiga
End of table 2.2

Liekamųjų irąų vektorių komponentai	Liekamosios irąų tipas						
		$\Delta S_r^{(z=3)}$	$\theta_p^{(z=3)}$	$S_{r\Sigma}^{(z=3)}$	$\Delta S_r^{(z=4)}$	$\theta_p^{(z=4)}$	$S_{r\Sigma}^{(z=4)}$
S_{r1}	M_{r1}	8,2916	0	12,78875	41,51358	0	54,30231
S_{r2}	M_{r2}	-8,30E-34	0	-1,10E-34	8,34E-38	0	0
S_{r3}	N_{r1}	2,162551	0	3,335473	-2,08999	0	1,245482
S_{r4}	M_{r3}	8,46E-34	0	3,57E-33	-8,90E-34	0	0
S_{r5}	M_{r4}	7,568928	0	11,67416	-7,31497	0	4,359186
S_{r6}	N_{r2}	-2,0729	0	-3,19719	-10,3784	0	-13,5756
S_{r7}	M_{r5}	-7,56893	0	-11,6742	7,314969	0	-4,35919
S_{r8}	M_{r6}	15,13786	0	23,34831	-14,6299	0	8,718372
S_{r9}	N_{r3}	-2,0729	0	-3,19719	-10,3784	0	-13,5756
S_{r10}	M_{r7}	-8,00E-33	0	2,00E-32	-7,70E-34	0	-1,70E-32
S_{r11}	M_{r8}	8,337558	0	12,85964	41,7437	0	54,60331
S_{r12}	N_{r4}	-1,93854	0	-2,98998	16,12879	0	13,13881
S_{r13}	M_{r9}	-15,1379	-8,60E-09	-23,3483	14,62994	-0,00616	-8,71837
S_{r14}	M_{r10}	15,92189	-0,00539	24,55755	34,50585	-0,01882	59,0634
S_{r15}	N_{r5}	-4,15729	0	-6,4121	-20,8143	0	-27,2264
S_{r16}	M_{r11}	-15,9219	0	-24,5575	-34,5059	0	-59,0634
S_{r17}	M_{r12}	16,70592	0	25,76679	83,64164	0	109,4084
S_{r18}	N_{r6}	-4,15729	0	-6,4121	-20,8143	0	-27,2264
S_{r19}	M_{r13}	-16,7059	0	-25,7668	-83,6416	0	-109,408
S_{r20}	M_{r14}	0,07676	0	0,118398	0,384361	0	0,5028
S_{r21}	N_{r7}	-0,22401	0	-0,3455	-14,0388	0	-14,3843

Pateikiamas detalus lygties (2.17) sprendimas:

$$\begin{aligned}\bar{G}(14,7) \cdot 0,001389 + \bar{G}(14,14) \cdot \tilde{\Theta}_{p14}^{(z=2)} &= 8,63566, \\ 2165,14 \cdot 0,001389 - 4554,53 \cdot \tilde{\Theta}_{p14}^{(z=2)} &= 8,63566, \\ \tilde{\Theta}_{p14}^{(z=2)} &= \frac{8,63566 - 2165,14 \cdot 0,001389}{-4554,53} = -0,001236.\end{aligned}$$

Taip suformuojamas tikrųjų plastinių deformacijų vektorius $\tilde{\Theta}_p^{(z=2)}$, įvertinant nusikrovusias deformacijas $\Theta_{p7} = 0,001389$ (pateiktas 2.3 lentelėje):

$$\tilde{\Theta}_p^{(z=2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,001389 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,001236 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Analogiškai, tikrųjų plastinių deformacijų etape $z=3$ vektoriaus $\tilde{\Theta}_p^{(z=3)}$ komponentas $\tilde{\Theta}_{p14}^{(z=3)}$ nustatomas iš lygties:

$$\bar{G}(14,7) \cdot \Theta_{p7}^{(z=1)} + \bar{G}(14,14) \cdot \tilde{\Theta}_{p14}^{(z=3)} = S_{r\Sigma 14}^{(z=3)}. \quad (2.18)$$

Gaunama $\tilde{\Theta}_{p14}^{(z=3)} = -0,004732$, t. y. tikroji plastinė deformacija įvertinant nusikrovusias deformacijas $\Theta_{p7}^{(z=1)} = 0,001389$ egzistavusias $z=1$ etape. Taip gaunamas vektorius $\tilde{\Theta}_p^{(z=3)}$ (pateiktas 2.3 lentelėje).

Čia nereikia painioti deformacijų su jų prieaugiais, kurie susidaro pereinant pvz. iš $z=2$ etapo į $z=3$, t. y. prieaugis $\Delta \tilde{\Theta}_{p14}^{(z=3)}$ randamas taip:

$$\bar{G}(14,7) \cdot \Theta_{p7}^{(z=1)} + \bar{G}(14,14) \cdot \tilde{\Theta}_{p14}^{(z=2)} + \bar{G}(14,14) \cdot \Delta \tilde{\Theta}_{p14}^{(z=3)} = S_{r\Sigma 14}^{(z=3)}. \quad (2.19)$$

Sprendžiama lygtis (2.19):

$$\begin{aligned}\bar{G}(14,7) \cdot 0,001389 + \bar{G}(14,14) \cdot \tilde{\Theta}_{p14}^{(z=2)} + \bar{G}(14,14) \cdot \Delta \tilde{\Theta}_{p14}^{(z=3)} &= 24,55755, \\ 2165,14 \cdot 0,001389 - 4554,53 \cdot (-0,001236) - 4554,53 \cdot \Delta \tilde{\Theta}_{p14}^{(z=3)} &= 24,55755, \\ \Delta \tilde{\Theta}_{p14}^{(z=3)} &= \frac{24,55755 - 2165,14 \cdot 0,001389 + 4554,53 \cdot (-0,001236)}{-4554,53} = -0,003496.\end{aligned}$$

$$\text{Tuomet } \tilde{\Theta}_{p14}^{(z=3)} = \tilde{\Theta}_{p14}^{(z=2)} + \Delta \tilde{\Theta}_{p14}^{(z=3)} = -0,001236 - 0,003496 = -0,004732.$$

Paskutiniojo etapo $z=4$ tikrųjų plastinių deformacijų vektorius $\tilde{\Theta}_p^{(z=4)}$ suformuojamas išsprendus lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \bar{G}(13,7) \cdot \Theta_{p7}^{(z=1)} + \bar{G}(13,13) \cdot \tilde{\Theta}_{p13}^{(z=4)} + \bar{G}(13,14) \cdot \tilde{\Theta}_{p14}^{(z=4)} = S_{r\Sigma 13}^{(z=4)}, \\ \bar{G}(14,7) \cdot \Theta_{p7}^{(z=1)} + \bar{G}(14,13) \cdot \tilde{\Theta}_{p13}^{(z=4)} + \bar{G}(14,14) \cdot \tilde{\Theta}_{p14}^{(z=4)} = S_{r\Sigma 14}^{(z=4)}. \end{cases} \quad (2.20)$$

Sprendžiama lygčių sistema (2.20):

$$\begin{cases} -5911,94 \cdot 0,001389 - 11823,9 \cdot \tilde{\Theta}_{p13}^{(z=4)} + 4330,27 \cdot \tilde{\Theta}_{p14}^{(z=4)} = -8,71837, \\ 2165,14 \cdot 0,001389 + 4330,27 \cdot \tilde{\Theta}_{p13}^{(z=4)} - 4554,53 \cdot \tilde{\Theta}_{p14}^{(z=4)} = 59,0634. \end{cases}$$

Iš čia $\tilde{\Theta}_{p13}^{(z=4)} = -0,0068496$ ir $\tilde{\Theta}_{p14}^{(z=4)} = -0,018820$. Tuomet tikrųjų plastinių deformacijų vektorius $\tilde{\Theta}_p^{(z=4)}$ etape $z=4$ suformuojamas taip:

$$\tilde{\Theta}_p^{(z=4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,001389 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0068496 \\ & & & & & & & -0,018820 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

2.3 lentelėje pateikti įrašų vektoriai $\tilde{S}_{r\Sigma}^{(z=2)}$, $\tilde{S}_{r\Sigma}^{(z=3)}$, $\tilde{S}_{r\Sigma}^{(z=4)}$ yra gaunami sprendžiant ekstreminį uždavinį (1.42)–(1.43) kiekvienam tikrųjų plastinių deformacijų $\tilde{\Theta}_p^{(z=2)}$, $\tilde{\Theta}_p^{(z=3)}$, $\tilde{\Theta}_p^{(z=4)}$ pasiskirstymui atskirai.

Pastebėtina, tai, kad 2.3 lentelėje tamsiau paryškinti vektorių $\tilde{S}_{r\Sigma}^{(z=2)}$ ir $\tilde{S}_{r\Sigma}^{(z=3)}$ komponentai sutampa su etapinio skaičiavimo be nusikrovimo įvertinimo atitinkamo etapo rezultatais (2.2 lentelė). Tačiau kiti minėtų vektorių komponentai gaunami skirtingi. Taigi išanalizavus skenavimo rezultatus kai nusikrovusių pjūvių plastinės deformacijos yra įvertinamos kituose etapuose, suformuluojama tokia Melano teoremos interpretacija:

konstrukcijoje, veikiamoje kintamos kartotinės apkrovos, liekamosios įrašos nuo apkrovimo istorijos nepriklauso tik nenusikraunančiuose pjūviuose.

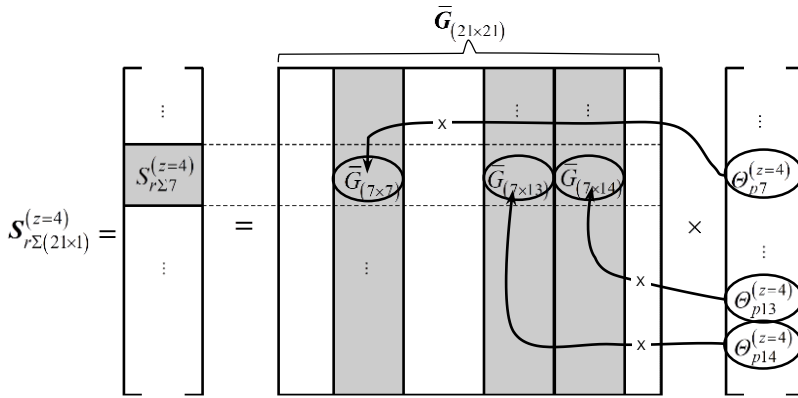
2.2 paveiksle grafiškai pavaizduojamas (patikrinamas) paskutinio etapo $z=4$ plastinių deformacijų $\tilde{\Theta}_{p7}^{(z=4)} = 0,001389 = x$ radimas, kai žinomos kitos plastinės deformacijos $\tilde{\Theta}_{p13}^{(z=4)}$, $\tilde{\Theta}_{p14}^{(z=4)}$ ir etapo suminių liekamųjų įrašų $\tilde{S}_{r\Sigma}^{(z=4)}$ pasiskirstymas.

2.3 lentelė. Tikrųjų plastinių deformacijų $\tilde{\Theta}_p^{(z)}$ ir liekamųjų įrašų $\tilde{S}_{r\Sigma}^{(z)}$ etapuose ($z = 2$, $z = 3$, $z = 4$) palyginimas

Table 2.3. Comparison of true plastic deformations $\tilde{\Theta}_p^{(z)}$ and residual internal forces

$\tilde{S}_{r\Sigma}^{(z)}$ at the stages ($z = 2$, $z = 3$, $z = 4$)

Liekamųjų įrašų vektoriaus komponentai	Liekamosios įrašos tipas	$\tilde{\Theta}_p^{(z=2)}$	$\tilde{S}_{r\Sigma}^{(z=2)}$	$\tilde{\Theta}_p^{(z=3)}$	$\tilde{S}_{r\Sigma}^{(z=3)}$	$\tilde{\Theta}_p^{(z=4)}$	$\tilde{S}_{r\Sigma}^{(z=4)}$
S_{r1}	M_{r1}	0	1,841049	0	10,13261	0	54,30232
S_{r2}	M_{r2}	0	-3,90E-35	0	-9,80E-34	0	0
S_{r3}	$N_{r[1]}$	0	1,937425	0	4,099985	0	1,245481
S_{r4}	M_{r3}	0	-4,60E-32	0	5,79E-34	0	0
S_{r5}	M_{r4}	0	6,780987	0	14,34995	0	4,359184
S_{r6}	$N_{r[2]}$	0	-0,46026	0	-2,53315	0	-13,5756
S_{r7}	M_{r5}	0,001389	-6,78099	0,001389	-14,3499	0,001389	-4,35918
S_{r8}	M_{r6}	0	13,56197	0	28,69989	0	8,718368
S_{r9}	$N_{r[3]}$	0	-0,46026	0	-2,53315	0	-13,5756
S_{r10}	M_{r7}	0	9,93E-32	0	1,65E-31	0	-1,00E-31
S_{r11}	M_{r8}	0	1,851255	0	10,18878	0	54,60332
S_{r12}	$N_{r[4]}$	0	-3,34494	0	-5,28351	0	13,13881
S_{r13}	M_{r9}	0	-13,562	0	-28,6999	-0,0068496	-8,71837
S_{r14}	M_{r10}	-0,001236	8,635661	-0,004732	24,55755	-0,018820	59,0634
S_{r15}	$N_{r[5]}$	0	-0,92308	0	-5,08035	0	-27,2264
S_{r16}	M_{r11}	0	-8,63566	0	-24,5575	0	-59,0634
S_{r17}	M_{r12}	0	3,70935	0	20,4152	0	109,4084
S_{r18}	$N_{r[6]}$	0	-0,92308	0	-5,08035	0	-27,2264
S_{r19}	M_{r13}	0	-3,70935	0	-20,4152	0	-109,408
S_{r20}	M_{r14}	0	0,017045	0	0,093811	0	0,502789
S_{r21}	$N_{r[7]}$	0	1,407518	0	1,183527	0	-14,3843



2.2 pav. Grafinis liekamųjų įrašų matricos narių išrinkimas

Fig. 2.2. Graphical selection of values from residual internal forces matrix

Pagal 2.2 paveikslą schemą sudaroma ir sprendžiama tikrųjų plastinių deformacijų lygtis, kai $\tilde{\Theta}_{p7}^{(z=4)} = x$:

$$\bar{G}(7,7) \cdot x + \bar{G}(7,13) \cdot \tilde{\Theta}_{p13}^{(z=4)} + \bar{G}(7,14) \cdot \tilde{\Theta}_{p14}^{(z=4)} = S_{r\Sigma 7}^{(z=4)}, \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} & -2955,97 \cdot x + (-5911,94) \cdot (-0,006849) + \\ & + 2165,14 \cdot (-0,018820) = -4,35918, \end{aligned}$$

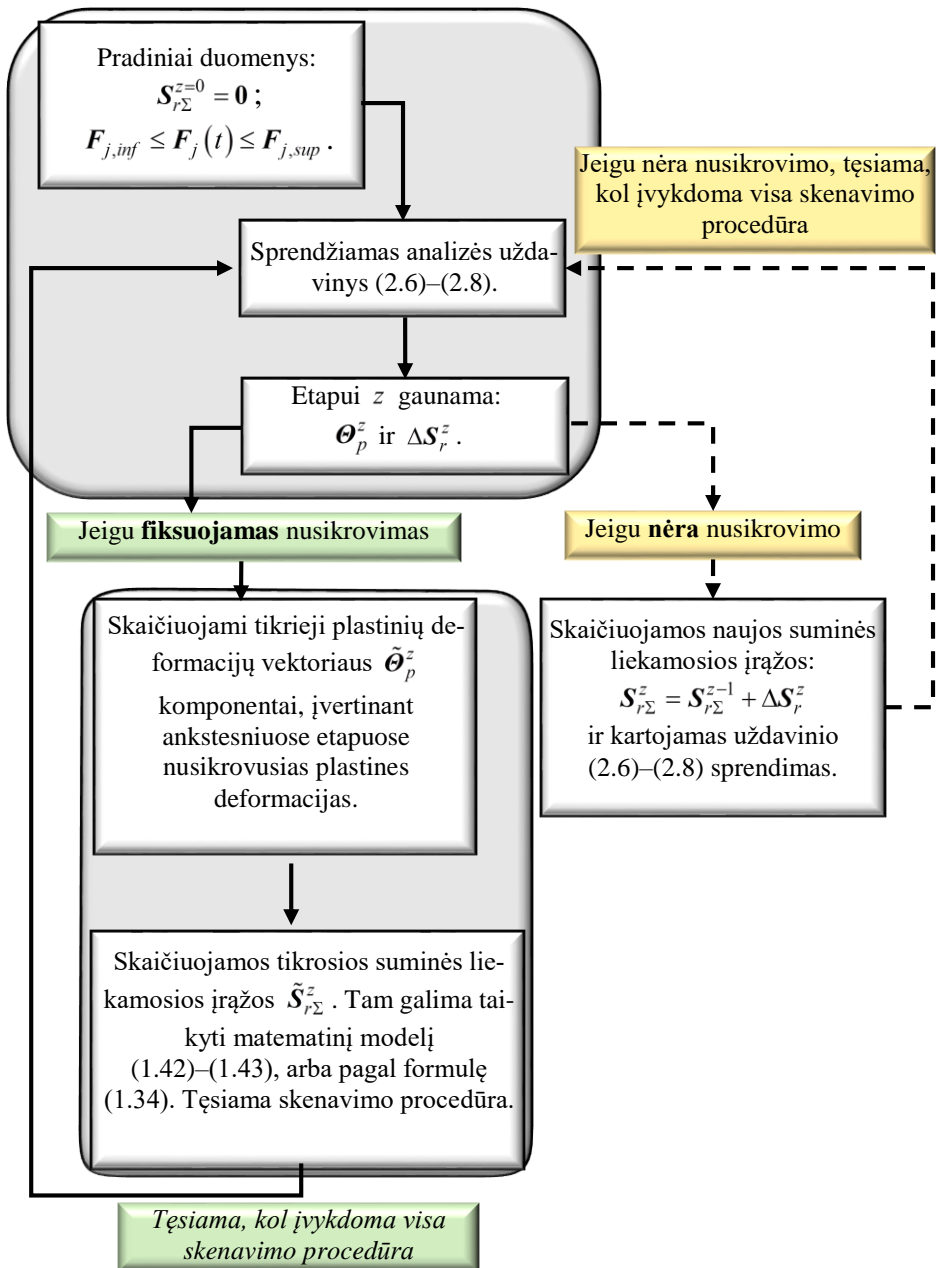
$$x = 0,0013889.$$

Lygties (2.21) sprendimu patikrintą, jog gautos tikrosios plastinės deformacijos $\tilde{\Theta}_p^{(z=4)}$ yra teisingos. Analogiškai galima patikrinti ir visą liekamųjų įrašų vektorių $\tilde{S}_{r\Sigma}^{(z=4)} = \bar{G}\tilde{\Theta}_p^{(z=4)}$.

Tipinis skenavimo procedūros etapas z schematiškai pavaizduotas 2.3 paveiksle.

2.4. Liekamųjų poslinkių ribų nustatymas

Tikslinamas Melano teoremos teiginys apie prisitaikymo būvio liekamųjų įrašų S_r^* priklausomybę nuo apkrovos istorijos. Kaip rodo 2.3 lentelės rezultatai, Melano teoremos dalis negalioja nenusikraunantiems pjūviams (šiuo atveju tai 10-asis pjūvis).



2.3 pav. Tipinės skenavimo procedūros etapo z schema
 Fig. 2.3. Scheme of the stage z of typical scanning procedure

Atkreiptinas dėmesys ir į tai, kad Melano teoremą formuluojant per energijos disipacijos uždavinio formuluotę ir realizuojant jį etapais, statinės formuluotės liekamųjų įrašų S_r^* pasiskirstymas galutiniame etape (kai apkrova artima suirimienei, tačiau dar nesukelia surimo) bus vienintelis. O kinematinės formuluotės rezultatai: liekamieji poslinkiai u_r^* ir plastinės deformacijos Θ_p^* nebus vieninteliai (gali kisti nepriklausomai nuo istorijos). Ir atvirkščiai, jeigu konstrukcijoje nei vienas pjūvis nenusikrovė, tada kinematinį rezultatų pasiskirstymas yra vienintelis.

Kaip pateikta 1.3.4 poskyryje, pasirinktos geometrijos rėminės konstrukcijos (1.6 pav.) prisitaikomumo būvio liekamieji poslinkiai, neskenuojant apkrovų veikimo srities, buvo gauti pagal $u_r^* = \bar{H}\Theta_p^*$, m, tokie:

$$u_r^* = \begin{bmatrix} -0,0021 & -0,0002 & -5,20E-05 & 0,000392 & -0,00212 \\ -0,00997 & -0,00426 & -0,00561 & -1,60E-06 & -0,00563 & 0,00053 \\ -0,00564 & -1,0E-05 & -0,00568 & 0,025925 & -0,00571 & 1,88E-05 \end{bmatrix}^T.$$

Pagal skenavimo paskutinio etapo tikrųjų plastinių deformacijų vektorių $\tilde{\Theta}_p^{(z=4)}$ (2.3 lentelė), gaunamas kitoks liekamųjų poslinkių pasiskirstymas $\tilde{u}_r = \bar{H}\tilde{\Theta}_p^{(z=4)}$, m:

$$\tilde{u}_r = \begin{bmatrix} -0,0021 & 0,000495 & 0,000643 & -0,0003 & -0,00212 \\ -0,00997 & -0,00426 & -0,00561 & -1,60E-06 & -0,00563 & 0,001903 \\ -0,00564 & -1,70E-05 & -0,00568 & 0,025925 & -0,00571 & 1,88E-05 \end{bmatrix}^T.$$

Lyginant vektorius u_r^* ir \tilde{u}_r , matyti, jog kai kurių komponentų reikšmės skiriasi. Pavyzdžiui, $u_{r3}^* = -5,20E-05$ m, bet $\tilde{u}_{r3} = 0,000643$ m. Akivaizdu, jog skirtumai tarp liekamųjų poslinkių vektorių komponentų turės įtakos nustatant liekamųjų poslinkių kitimo ribas $u_{r,sup}$ ir $u_{r,inf}$. Svarbu pažymėti tai, jog abu vektoriai u_r^* ir \tilde{u}_r atitinka prisitaikomumo būvį. Todėl ribų $u_{r,sup}$ ir $u_{r,inf}$ nustatymas yra svarbus tikrinant konstrukcijos atitikimą tinkamumo ribinio būvio sąlygoms (Juozaipaitis, Norkus 2004; Kaklauskas *et al.* 2012), kurios įvertinamos sudarant optimizavimo uždavinių matematinius modelius.

2.5. Antrojo skyriaus išvados

1. Konstrukcijų, kurių skerspjuviai prisitaikomumo proceso metu patiria nusikrovimą, liekamiesiems poslinkiams nustatyti pilnutinės potencinės energijos minimumo principas negali būti taikomas tiesiogiai.
2. Skenavimo metodas pjūvių nusikrovimo faktą leidžia užfiksuoti tik pasirinktos skenavimo strategijos ribose. Liekamųjų poslinkių kitimo ribų nustatymo patikimumas gali būti padidintas didinant skenavimo strategijų skaičių.
3. Pasiūlytoje skenavimo metodikoje, kitaip nei tradiciniame inkrementiniame „žingsnis po žingsnio“ metode, nereikia keisti skaičiuojamosios schemos kiekviename skenavimo etape.
4. Taikant pasiūlytą skenavimo metodiką prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo uždavinių matematiniuose modeliuose galima tiksliau įvertinti konstrukcijų saugos ir tinkamumo ribinių būvių reikalavimus (nustatant liekamųjų poslinkių kitimo ribas $\mathbf{u}_{r,sup}$ ir $\mathbf{u}_{r,inf}$).
5. Analizuojant skenavimo rezultatus, nustatyta, kad pagal Melano teorimą liekamųjų įrąžų \mathbf{S}_r^* pasiskirstymas galutiniam etape (kai apkrova artima suiriminei) yra vienintelis. Tuo tarpu liekamieji poslinkiai \mathbf{u}_r^* ir plastinės deformacijos $\boldsymbol{\Theta}_p^*$ nebūtinai yra vieninteliai (gali priklausyti nuo apkrovimo istorijos).
6. Jeigu konstrukcijos pjūviai nepatiria nusikrovimo, liekamųjų poslinkių \mathbf{u}_r^* ir plastinių deformacijų $\boldsymbol{\Theta}_p^*$ vektorių komponentai nepriklauso nuo apkrovimo istorijos.

Optimizavimas prisitaikomumo sąlygomis: išplėstiniai skaitiniai eksperimentai

Skyriuje aprašomi optimizacijos prisitaikomumo sąlygomis uždavinių matematinų modelių pritaikymo pavyzdžiai – rėminių konstrukcijų optimizavimo skaitiniai eksperimentai.

Pirmasis poskyris skirtas plieninių rėminių konstrukcijų optimizavimo prisitaikomumo sąlygomis skaitinio eksperimento aprašymui. Sprendžiamas prisitaikančios rėminės konstrukcijos tūrio optimizacijos uždavinys dviem atvejais, kai poslinkiai nėra ribojami ir, kai ribojami ekstreminiai konstrukcijos mazgų poslinkiai. Pateikiamos lyginamosios išvados. Poslinkių ribos nustatomos atsižvelgiant į antrojo skyriaus išvadas dėl šių ribų nustatymo metodikos tobulinimo, pagal konstrukcijos skenavimo analizės rezultatus.

Antrajame poskyryje aprašomas gelžbetoninių rėminių konstrukcijų optimizavimo prisitaikomumo sąlygomis skaitinis eksperimentas. Pristatomas modifikuotas tokių konstrukcijų optimizavimo uždavinio matematinis modelis, kur taikomo sąlygos išvestos atsižvelgiant į gelžbetoninio skerspjuvio stiprumo sritį. Poskyrio medžiaga parengta stažuotės, Zielona Góra universitete Lenkijoje, metu.

Skyriaus tematika disertacijos autorius paskelbė keturis straipsnius (Liepa, Karkauskas 2012a, 2012b; Alawdin *et al.* 2016; Alawdin, Liepa 2016).

3.1. Prisitaikančių plieninių rėminių konstrukcijų optimizavimas ribojant poslinkius

Šiame poskyryje bendrasis matematinis modelis (1.44)–(1.54) pritaikomas rėminių konstrukcijų tūrio minimizavimui prisitaikomumo sąlygomis. Tikslo funkciją (1.44) galima perrašyti taip: $f = \sum_k L_k A_k (M_{0k})$. Tada visas rėminės konstrukcijos tūrio minimizavimo uždavinio matematinis modelis užrašomas taip:

$$\text{rasti} \quad \min \sum_k L_k A_k (M_{0k}), \quad (3.1)$$

$$\text{kai} \quad AS_r = \mathbf{0}, \quad (3.2)$$

$$\varphi_j = C(M_0) - f_j(S_{ej}(M_0) + S_r) \geq \mathbf{0}, \quad (3.3)$$

$$D(M_0)S_r + \Theta_p(M_0) - A^T u_r = \mathbf{0}, \quad (3.4)$$

$$\Theta_p(M_0) = \sum_j \left[\nabla f_j(S_{ej}(M_0) + S_r) \right]^T \lambda_j, \quad (3.5)$$

$$\lambda_j^T \left[C(M_0) - f_j(S_{ej}(M_0) + S_r) \right] = 0, \quad (3.6)$$

$$\lambda_j \geq \mathbf{0}, \quad \lambda_j = [\lambda_{1j} \lambda_{2j} \dots \lambda_{\zeta j}]^T, \quad (3.7)$$

$$M_0 \geq M_{0,min}, \quad (3.8)$$

$$u_{min} \leq u_{ej}(M_0) + u_{r,inf}, \quad (3.9)$$

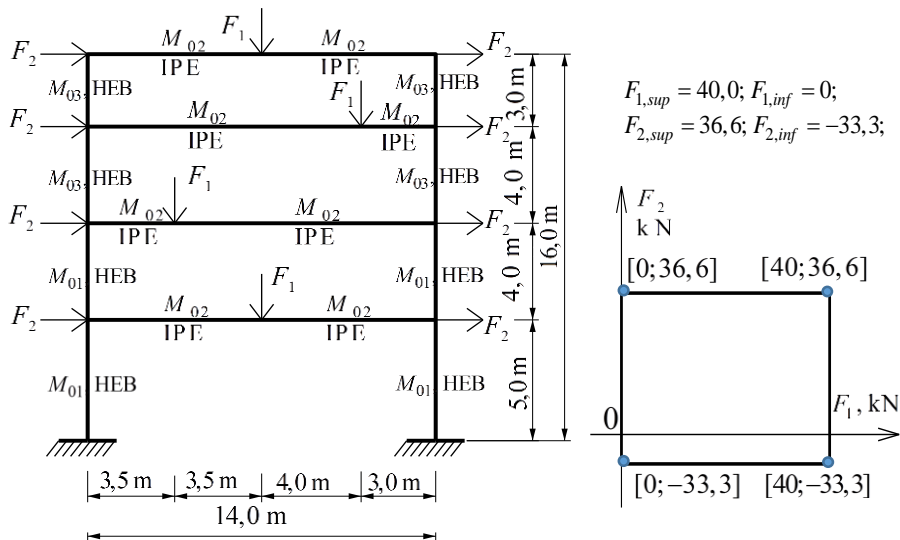
$$u_{ej}(M_0) + u_{r,sup} \leq u_{max}, \quad (3.10)$$

$$S_{ej} = \alpha(M_0)F_j, \quad u_{ej} = \beta(M_0)F_j \quad \text{visoms } j \in J. \quad (3.11)$$

Rėminė strypinė konstrukcija diskretizuojama pusiausviraisiais baigtiniais elementais, kurie gali būti lenkiami, tempiami arba gniuždomi. Ribinės elemento k įrašos yra lenkimo momentas M_{0k} ir ribinė ašinė jėga N_{0k} . Tik lenkimo atveju matematiniam modelyje (3.1)–(3.11) pagrindiniu dydžiu yra M_0 . Kai įvertinama M ir N įtaka, takumo sąlygose (3.3) ribinė ašinė jėga pervedama į ribinį lenkimo momentą $N_{0k} = M_{0k}/c$ (3.12, 3.13 formulės).

Šiame poskyryje nagrinėjama keturių aukštų plokščia rėminė konstrukcija (3.1 pav.). Rėmo kolonos projektuojamos iš standartinių HEB tipo profiliuotųjų, sijos iš IPE tipo profiliuotųjų. Elementų lenkiamasis EI ir ašinis EA standžiai žinomi (čia $E = 205,0$ GPa – plieno tamprumo modulis; $I = I_y = a_1 A^{b_1}$, cm^4 –

skerspjūvio inercijos momentas; A , cm^2 – skerspjūvio plotas; a_1 ir b_1 – skerspjūvio parametrų ryšio konstantos) yra pateikti 3.1 lentelėje.



3.1 pav. Rėminės konstrukcijos skaičiuojamoji schema ir apkrovų veikimo sritis

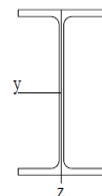
Fig 3.1. Calculation scheme of the frame structure and load variation locus

Taip pat žinomos elementų ribinės įrašos: ribinis lenkimo momentas $M_0 = f_y W_{pl}$ ir ribinė ašinė jėga $N_0 = f_y A$ (čia $f_y = 253,2$ MPa – plieno takumo įtempių riba; $W_{pl} = W_{pl,y} = a_3 A^{b_3}$, m^3 – skerspjūvio atsparumo momentas; a_3 ir b_3 – skerspjūvio parametrų ryšio konstantos (3.1 lentelė)).

3.1 lentelė. Pradiniai skerspjūvių parametrai ir ryšio konstantos

Table 3.1. Initial cross-sectional parameters and relation constants

Pradiniai skerspjūvių parametrai	A , cm^2	$I_y = a_1 A^{b_1}$, cm^4		$W_{pl,y} = a_3 A^{b_3}$, cm^3	
HEB 320	161,3	30625,28		2136,80	
IPE 100	10,3	176,85		40,12	
HEB 120	34,0	853,35		164,80	
		a_1	b_1	a_3	b_3
HEB 320 – 500		0,0027	3,1956	0,0589	2,0654
IPE		0,7885	2,3210	0,8411	1,6572
HEB 100 – 300		0,2639	2,2917	0,4933	1,6467



Nagrinėjamas rėmas (3.1 pav.) yra veikiamas kintamos kartotinės apkrovos, t. y. dviejų koncentruotų jėgų kintančių laike $F_1(t)$ ir $F_2(t)$. Priimtos jėgų kitimo ribos yra $0 \text{ kN} \leq F_1(t) \leq 40,0 \text{ kN}$ ir $-33,3 \text{ kN} \leq F_2(t) \leq 36,6 \text{ kN}$ (ribos parenkamos tokios, jog konstrukcijos darbas būtų tamptirai-plastinis, tačiau konstrukcija dar nesuirytų). Laisvai sudaromos galimos apkrovų veikimo kombinacijos pavaizduotos 3.2 lentelėje.

Optimizacijos uždavinys (3.1)–(3.11) sprendžiamas dviem atvejais įvertinant poslinkių ribojimo sąlygas (3.9)–(3.10) ir jas ignoruojant (C priedas). Sprendimui taikoma MATLAB programinio paketo paprogramė *fmincon*, į kurią kreipinys programiniame tekste yra toks:

```
options=optimset('Algorithm','sqp','PlotFcns',{@optimplotfval});
[x,fval,exitflag]=fmincon(@myfun,x0,Anq,bnq,Aeq,beq,lb,ub,@mycon,options);
```

Čia *options* – paprogramės *fmincon* nustatymų rinkinio *optimset* suformavimas, kur nurodomas taikytinas algoritmas '*Algorithm*', '*sqp*' bei '*PlotFcns*', {@optimplotfval} – kreipinys, kuris nurodo kad būtų pateikiamas tikslo funkcijos reikšmės konvergavimo grafikas. Iteracijos rezultatų išvedimo kreipinys *[x,fval,exitflag]*, čia *x* – kintamųjų vektorius, *fval* – tikslo funkcijos reikšmė, *exitflag* – išsprendimo požymis. Toliau nurodomi įvadiniai duomenys paprogramei *fmincon*, tai @myfun – kreipinys į funkcinį failą „myfun.m“, kuriame užprogramuota uždavinio tikslo funkcija (3.1), *x0* – sprendimo atskaitos taškas/vektorius, *Anq*, *bnq* – atitinkamai uždavinio apribojimų (nelygybių forma) koeficientų matrica ir laisvųjų narių vektorius, *Aeq*, *beq* – atitinkamai uždavinio apribojimų (lygybių forma) koeficientų matrica ir laisvųjų narių vektorius, *lb*, *ub* – kintamųjų vektoriaus apatinė ir viršutinė ribos, @mycon – kreipinys į apribojimų failą „mycon.m“, kuriame užprogramuota matematinio griežtumo sąlyga (3.6).

Yra nustatoma minimalus konstrukcijos tūris prisitaikymo prie duotos apkrovos metu. Sprendinio rezultatai yra: ribinės įrašos M_0^* (ribinė ašinė jėga gaunama netiesiogiai $N_{0k}^* = M_{0k}^*/c_k$), liekamosios įrašos S_r^* (vektorius, kurio komponentai M_r^* ir N_r^*) užtikrinančios konstrukcijos prisitaikomumą, plastinės deformacijos θ_p^* ir liekamieji poslinkiai u_r^* .

Takumo sąlygose (3.3) (išskleista forma jos buvo užrašytos 1.37 formulėje) ribinė ašinė jėga N_0 išreiškiama per ribinį lenkimo momentą M_0 įvedant ribinių įrašų santykio koeficientus c^+ (tempiamiems elementams) ir c^- (gniuždomiems elementams) (Karkauskas 2007; Liepa, Karkauskas 2012b; Saka, Kameshki 1998):

$$c^+ = \frac{M_0}{N_0} = \frac{f_y a_3 A^{b_3}}{f_y A} = a_3 A^{b_3-1}, \quad (3.12)$$

$$c^- = \frac{M_0}{N_{cr}} = \frac{f_y a_3 A^{b_3}}{\chi f_y A} = \frac{a_3}{\chi} A^{b_3-1}. \quad (3.13)$$

Čia $N_{cr} = \chi f_y A$ yra ribinė/kritinė ašinė jėga (gniuždomų elementų klupamasis atsparis); χ – takumo įtempių redukcijos koeficientas, priklausantis nuo bedimensio sąlyginio liaunio $\bar{\lambda}$ (Kala 2012; Karkauskas 2007; LST EN 1993-1-1:2005+AC:2006 2010). Šiame pavyzdyje N_{cr} ašinė jėga skaičiuojama tik kolonoms.

Konstruktinių reikalavimų sąlygos (3.8) apatinė riba $M_{0,min}$, atsižvelgiant į projektavimo normų reikalavimus ribiniam liauniui λ_{lim} , gali būti skaičiuojama taip (Karkauskas 2007; Liepa 2012):

$$M_{0,min} = f_y a_3 \left(\frac{l_b^2}{a_1 \lambda_{lim}^2} \right)^{\frac{b_3}{b_1-1}}. \quad (3.14)$$

Čia elemento klupamasis ilgis l_b (jo nustatymas disertacijoje detaliau nagrinėjamas). Šiame darbe dėl liaunos konstrukcijos geometrijos sąlyga (3.14) netaikoma, tačiau įvedus papildomus ryšius (sumažinus elementų klupamąjį ilgį) sąlyga (3.14) būtų taikytina. Priede C pateikiamas į optimizavimo uždavinio sprendimo algoritmą integruotas elementų klupamojo ilgio skaičiavimo (pagal LST STR 2.05.08:2005) algoritmas (norint naudoti algoritmą programiniame kode reikia „nuimti“ komentavimą), kuris detalai pristatytas disertacijos autoriaus magistriniame darbe (Liepa 2012). Šiame poskyryje $M_{0,min}$ prilyginamas pradinės iteracijos (Iter. Nr. 0) ribiniam lenkimo momentui M_0 (3.3 lentelė).

Konstrukcijos diskretinį modelį sudaro 16 baigtinių elementų. Kiekviename elemento gale yra skaičiuojamasis pjūvis, todėl bendras skaičiuojamųjų pjūvių skaičius yra 32. Kiekviename baigtiniame elemente veikia lenkimo momentas M ir ašinė jėga N . Lenkimo momentai $M(x)$ skaičiuojami pagal formulę (1.6). Bendras įrašų skaičius yra 48. Nagrinėjamos rėminės konstrukcijos kinematinio laisvumo laipsnis (*degree of freedom (DOF)*) yra 36.

Pirmuoju uždavinio (3.1)–(3.11) sprendimo atveju (kai poslinkiai nėra ribojami) optimalus sprendinys buvo gautas po 7 iteracijų (3.3 lentelė, 3.3 pav.). Pagal gautas optimalias ribinių lenkimo momentų reikšmes M_0^* parinkti rėmo elementų

skerspjūvių plotai A_1^* , A_2^* ir A_3^* (3.3 lentelė). Konstrukcijos prisitaikysios prie duotos apkrovos minimalus tūris yra $V_{unbound}^* = 0,7569 \text{ m}^3$.

Didžiausias horizontalus linijinis poslinkis yra konstrukcijos viršutinės sijos mazgų poslinkis:

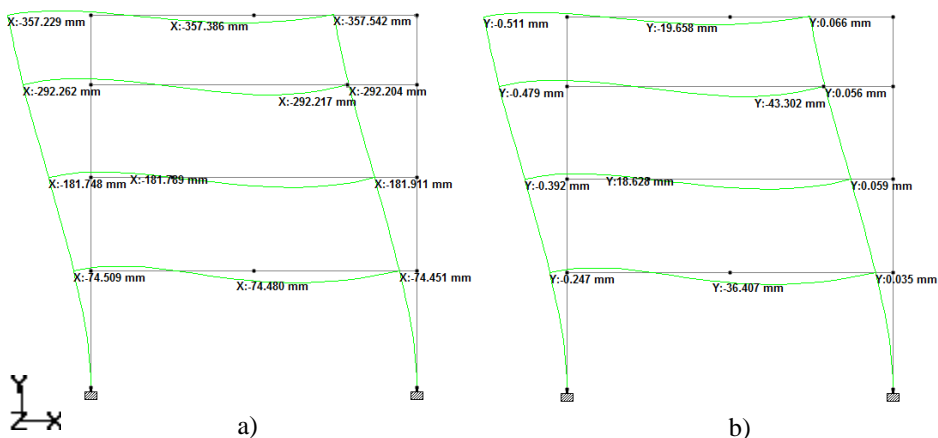
$$u_{sum}^{hor} = u_{e,max}^{hor}(Komb. II) + u_r^{hor*} = 0,3747 + 0,1363 = 0,511 \text{ m}.$$

Didžiausias vertikalus linijinis poslinkis yra antroje nuo viršaus sijoje mazge po apkrova:

$$u_{sum}^{vert} = u_{e,max}^{vert}(Komb. II) + u_r^{vert*} = 0,0467 + 0,0057 = 0,0524 \text{ m}.$$

Tamprūs poslinkius, taip pat galime suskaičiuoti ir patikrinti, pavyzdžiui su programa STAAD.Pro (3.2 pav.), bet projektuoti tokią konstrukciją neatsižvelgiant į liekamuosius dydžius būtų nesaugu.

Todėl tampa, svarbu optimizavimo uždaviniuose tinkamai parinkti ir įvertinti galimas liekamųjų poslinkių kitimo ribas.



3.2 pav. Komb. II tamprūs poslinkiai (STAAD.Pro): a) horizontalūs; b) vertikalūs

Fig. 3.2. Comb. II elastic displacements (STAAD.Pro): a) horizontal; b) vertical

Antruoju uždavinio (3.1)–(3.11) sprendimo atveju, ribojamas viršutinės sijos mazgų horizontalus poslinkis, t. y. atsižvelgiama į matematinio modelio apribojimų sąlygas (3.9) ir (3.10). Maksimalus viršutinės sijos horizontalusis poslinkis ribojamas ties $u_{max}^{hor,top} = 0,3 \text{ m}$, $u_{min}^{hor,top} = -0,3 \text{ m}$. Tada optimalus sprendinys gautas po 13 iteracijų (3.3 lentelė, 3.3 pav.). Minimalus prisitaikysios prie duotos apkrovos konstrukcijos tūris (atsižvelgiant į poslinkių ribojimo sąlygas) yra $V_{bound}^* = 0,8178 \text{ m}^3$. Ekstreminis viršutinės sijos mazgų horizontalus linijinis poslinkis neviršija nustatytų ribų:

$$u_{sum,max}^{hor,top,bounded} = u_{e,max(Komb. IV)}^{hor,top} + u_{r,sup}^{hor*} = 0,1130 + 0,1798 = 0,2928 \text{ m} < u_{max}^{hor,top},$$

$$u_{sum,min}^{hor,top,bounded} = u_{e,min(Komb. I)}^{hor,top} + u_{r,inf}^{hor*} = 0,0873 + (-0,0182) = 0,0691 \text{ m} > u_{min}^{hor,top}.$$

Čia $u_{r,inf}^{hor*}$ ir $u_{r,sup}^{hor*}$ nustatyti atsižvelgiant į antro skyriaus išvadas.

3.2 lentelė. Galimos apkrovimo kombinacijos

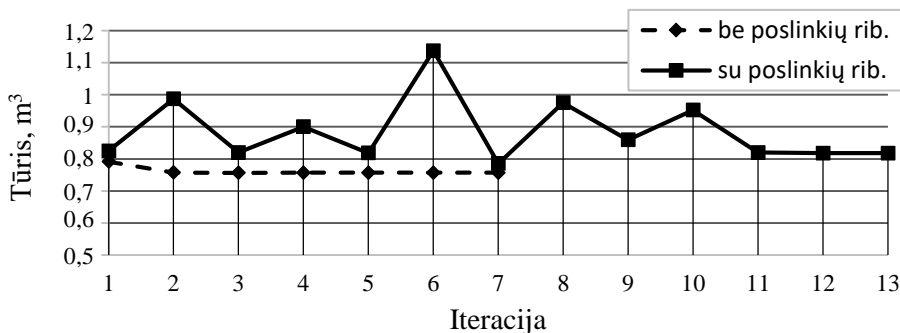
Table 3.2. Possible loading combinations

Horizontali apkrova iš karės	Horizontali apkrova iš dešinės
Komb. I: $F_{1,sup} + F_{2,sup}$	Komb. II: $F_{1,sup} + F_{2,inf}$
Komb. III: $F_{1,inf} + F_{2,sup}$	Komb. IV: $F_{1,inf} + F_{2,inf}$

Didžiausias vertikalus linijinis antros nuo viršaus sijos mazgo po apkrova poslinkis, nors ir buvo ribotas $u_{max}^{vert} = 0,1 \text{ m}$ ir $u_{min}^{vert} = -0,1 \text{ m}$ ribų nepažeidė:

$$u_{sum,max}^{vert,bounded} = u_{e,max(Comb. II)}^{vert} + u_{r,sup}^{vert*} = 0,0102 + 0,0016 = 0,0118 \text{ m} < u_{max}^{vert},$$

$$u_{sum,min}^{vert,bounded} = u_{e,min}^{vert(Comb. III)} + u_{r,inf}^{vert*} = 0,0048 + 0,0011 = 0,0059 \text{ m} > u_{min}^{vert}.$$



3.3 pav. Konstrukcijos tūrio konvergavimo iteracijose palyginimas

Fig. 3.3. Comparison of convergence of volume per iterations

Optimizavimo uždavinio (3.1)–(3.11) sprendimo algoritmai pateikti C priede.

3.3 lentelė. Keturių aukštų plieninio rėmo optimizavimo rezultatai

Table 3.3. Four storey steel frame optimization results

Optimizavimo rezultatai <i>ignoruoiant</i> poslinkių ribojimų sąlygas							
It. Nr.	Tūris, m³	M_{01} , kNm	M_{02} , kNm	M_{03} , kNm	A_1 , cm²	A_2 , cm²	A_3 , cm²
0	0,3956	502,1480	9,4273	38,5536	161,3	10,3	34,0
1	0,7914	502,1474	177,4535	289,7516	161,3	60,5373	115,7252
2	0,7575	502,1474	140,2679	322,8711	161,3	52,5288	123,5867
3	0,7566	502,1474	134,6372	342,4027	161,3	51,2460	128,0744
...
5	0,7569	502,1474	134,6969	343,0448	161,3	51,2598	128,2202
6	0,7569	502,1474	134,6969	343,0450	161,3	51,2598	128,2203
7	0,7569	502,1474	134,6969	343,0450	161,3	51,2598	128,2203
Parinkti artimiausi skerspjūviai					HEB 320	IPE 300	HEB 280
					161,3	53,8	131,0
Optimizavimo rezultatai <i>atsižvelgiant</i> į poslinkių ribojimų sąlygas							
1	0,8249	768,3917	158,8756	258,2749	198,1915	56,6294	107,9191
2	0,9869	888,0433	286,7587	259,0429	212,5767	80,8718	108,1139
3	0,8196	549,1016	188,1091	299,5572	168,4343	62,7056	118,0879
...
11	0,8199	824,6464	133,7337	298,5301	205,0887	51,0383	117,8419
12	0,8179	691,6443	160,5399	283,2098	188,347	56,9867	114,1314
13	0,8178	633,3031	157,6769	336,0285	180,48	56,3712	126,6212
Parinkti artimiausi skerspjūviai					HEB 360	IPE 330	HEB 280
					181,0	62,6	131,0

Pagal 3.3 lentelėje pateiktus rezultatus matyti, jog rėmas, tenkinantis poslinkių ribojimo sąlygas, yra 8,05 % didesnio tūrio, o optimalūs ribiniai lenkimo

momentai M_{01}^*, M_{02}^* yra atitinkamai 26,12 % ir 17,06 % didesni, o M_{03}^* yra 2,05 % mažesnis.

3.2. Gelžbetoninių rėminių konstrukcijų optimizavimas prisitaikomumo sąlygomis

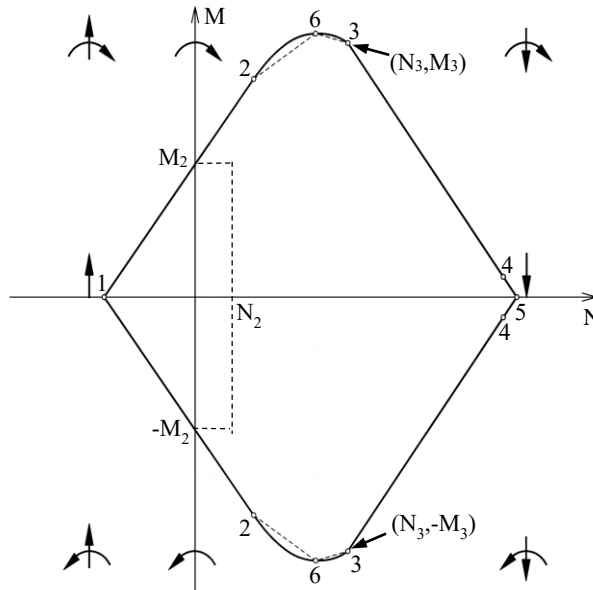
Šiame poskyryje nagrinėjami gelžbetoninių konstrukcijų, veikiamų kartotinės kintamos apkrovos, optimalaus projektavimo ypatumai. Pirmieji darbai optimizuoti prisitaikančias gelžbetonines konstrukcijas publikuoti praeito šimtmečio pabaigoje (Alawdin 1997; Giambanco *et al.* 1994; Polizzotto, Rizzo 1987; Zavelani 1971), visose jų autoriai susiduria su gelžbetonio medžiagos nevienalytiškumo problemomis, siūlomi įvairūs optimizavimo uždavinių sprendimo metodai. Paminėtinas Giambanco ir bendraautorijų darbas (Giambanco *et al.* 1994), kuriame pasiūlyta idealizuota gelžbetoninio skerspjuvio takumo (stiprumo) sritis, suformuota pagal keturis kritinius skerspjuvio suirimo būvius. Sprendžiant optimizavimo uždavinį skerspjuvio stiprumo sritis yra plečiama plastinių lankstų bedimensių plastinių atsparių vektoriaus kryptimi.

Plastinių deformacijų reikšmių nustatymas prisitaikomumo atveju, yra svarbus uždavinys projektuojant tokias statybines konstrukcijas. Tokiu atveju yra reikalingas apytikslis plastinių deformacijų įvertinimas (Alawdin 2002; Alawdin, Kasabutski 2009), kuris čia pateikiamas kvadratinų apribojimų forma. Diskretizuojant strypiniais baigtiniais elementais, optimizavimo uždavinys prisitaikomumo sąlygomis formuluojamas kaip neiškilo netiesinio matematinio programavimo uždavinys. Lenkimo momento ir ašinės jėgos sąveika yra įvertinama elemento takumo sąlygose. Siekiama gauti optimalų projektą prisitaikomumo sąlygomis. Priimta parametrinio tiesinio programavimo skaičiuojamoji strategija pasirodė esanti pakankamai efektyvi, leidžianti gauti optimalios gelžbetoninės konstrukcijos reikalingą armatūros procentinę dalį, kuri atitinka saugaus projekto reikalavimus. Pasiūlytas metodas leidžia atsisakyti įprastinių lenkimo momento kreivumo arba momento sukimosi prielaidų aproksimacijos, įvertinant vidurkinę M-N takumo sritį, tokiu būdu taip pat atsižvelgiant į vidinių jėgų kombinacijos įtaką.

3.2.1. Gelžbetoninio skerspjuvio stiprumo sąlygos

Bendruoju atveju skerspjuvio stiprumas yra ribojamas ribinių įrašų ($S_{0k} = (M_{0k}, N_{0k})$, $k \in K$), kurios yra skerspjuvio geometrinių ir medžiagos parametrų funkcijos. Dažnu atveju tai yra netiesinės funkcijos, ir gelžbetoninio simetriškai armuoto skerspjuvio atveju pavaizduotos 3.4 paveiksle. Disertacijoje

taikomos funkcijos buvo išvestos Čarneckio ir Staščiuko (Czarnecki, Staszczuk 1997), o Eurokodo 2 (LST EN 1992-1-1:2005 2007) reikalavimams jas pritaikė Korencas (Korentz 2014), todėl toliau detalai jų išvedimas nenagrinėjamas.



3.4 pav. Stiprio sritis, stačiakampio simetriškai armuoto skerspjūvio sąveikos kreivės
Fig. 3.4. Strength locus, interaction curves of a rectangular doubly symmetrically reinforced cross-section

Skerspjūvio įrąžų sąveikos kreivės kertasi taip vadinamuose sąveikos taškuose, suformuodamos skerspjūvio takumo arba stiprio (atspario takumui) sritį (3.4 pav.). Čia išskiriami šeši kritiniai sąveikos kreivių susikirtimo taškai, kurie nusako skirtingus gelžbetoninio skerspjūvio būvius: 1 – suirimas nuo grynojo tempimo; 2 – suirimas, kai $M \neq 0$ ir $N \neq 0$ (tai taškas kuriame parabolė (2-6) kerta tiesę (1-2)); 3 – suirimas, kai $M \neq 0$ ir $N \neq 0$ (parabolės (6-3) ir tiesės (3-4) susikirtimo taškas); 4 – suirimas nuo gniuždymo dėl staigaus ašinės jėgos padidėjimo ($M \neq 0$); 5 – suirimas dėl grynojo gniuždymo ($M = 0$); 6 – balansuotas suirimas, kai tempiama plieninė armatūra pasiekia takumo ribą, o gniuždomas betonas palaipsniui pasiekia gniuždomųjų deformacijų ribą ($\varepsilon_{cu} = 0,0035$). Punktyrinės linijos tarp segmentų 2-6 ir 6-3 vaizduoja tiesiškai aproksimuotas netiesinės sąveikos sritį ribojančias kreives. Nesimetrinio armavimo atveju sąveikos sritis turėtų skirtingas viršutinę ir apatinę dalis.

Sąveikos kreivių susikirtimo taškų išraiškos pateiktos 3.4 lentelėje (pagal Czarnecki ir Staszczuk, 1997; Korentz, 2014).

3.4 lentelė. Sąveikos kreivių susikirtimo taškai (Czarnecki and Staszczuk 1997; Korentz 2015)

Table 3.4. Intersection points of interaction curves (Czarnecki and Staszczuk 1997; Korentz 2015)

$N_1 = -2\alpha\eta f_{cd}bd;$	(3.15)
$N_2 = 2\beta\eta f_{cd}bd;$	(3.16)
$N_3 = \eta f_{cd}bd\zeta_{lim};$	(3.17)
$N_4 = (1+2\alpha)\eta f_{cd}bd;$	(3.18)
$N_5 = (1+2\alpha+\beta)\eta f_{cd}bd;$	(3.19)
$N_6 = 0,5(1+\beta)\eta f_{cd}bd;$	(3.30)
$M_1 = 0;$	(3.22)
$M_2 = ((\alpha+\beta)(1-\beta))\eta f_{cd}bd^2;$	(3.23)
$M_3 = (-0,5\zeta_{lim}^2 + 0,5\zeta_{lim}(1+\beta) + \alpha(1-\beta))\eta f_{cd}bd^2;$	(3.24)
$M_4 = 0,5\beta\eta f_{cd}bd^2;$	(3.24)
$M_5 = 0;$	(3.25)
$M_6 = (\alpha(1-\beta) + 0,125(1+\beta)^2)\eta f_{cd}bd^2.$	(3.26)

Koeficientai α , β nustatomi pagal tokias formules:

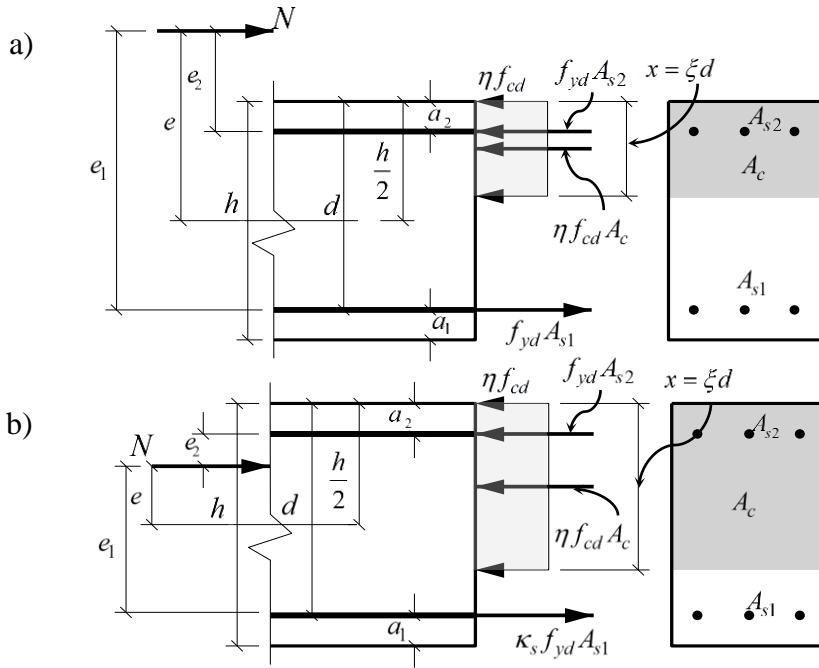
$$\alpha = f_{yd}A_{s1}/k_1; \quad (3.27)$$

$$\beta = a_1/k_1; \quad (3.28)$$

$$k_1 = \eta f_{cd}bd. \quad (3.29)$$

Čia koeficientas $\eta = 1$, kai cilindrinis charakteristinis gniuždomasis betono stipris po 28 dienų kietėjimo $f_{ck} \leq 50$ MPa (LST EN 1992-1-1:2005 2007); f_{cd} – skaičiuojamasis betono stipris, C30/37 klasės betonui $f_{cd} = 20$ MPa; b – gelžbetoninio elemento skerspjūvio plotis (3.4 pav.); d – atstumas nuo skerspjūvio viršaus iki tempiamos armatūros (3.4 pav.); a_1 – atstumas nuo tempiamo paviršiaus iki tempiamos armatūros; A_{s1} – tempiamos armatūros skerspjūvio plotas; ζ_{lim} – gniuždomosios zonos ribinis sąlyginis aukštis, kai betonas C30/37 ir armatūra B400 klasės, tai $\zeta_{lim} = 0,534$ (LST EN 1992-1-1:2005 2007).

Turint sąveikos taškų išraiškas (3.4 lentelė) nesunku atlikti gelžbetoninio simetriškai armuoto skerspjūvio (3.5 pav.) stiprumo srities tiesinę aproksimaciją.



3.5 pav. Stačiakampio simetriškai armuoto ekscentriškai gniuždomo skerspjūvio armatūros skerspjūvio ploto projektavimas: a) didelis ekscentricitetas; b) mažas ekscentricitetas

Fig. 3.5. Reinforcement design of a rectangular eccentrically compressed cross-section (doubly symmetrically reinforced): a) large eccentricity; b) small eccentricity

Pateikiamos išvestos tiesinės aproksimacijos funkcijos (čia parašytos nelygybės pavidalu):

$$M + \left(\frac{a_1 - d}{2} \right) N + A_{s1} f_{yd} (a_1 - d) \geq 0; \quad (3.30)$$

$$M + \left(\frac{a_1 - d + d \xi_{lim}}{2} \right) N + A_{s1} f_{yd} (a_1 - d) - a_1 \eta f_{cd} b d \xi_{lim} \geq 0; \quad (3.31)$$

$$M + \left(\frac{2d \xi_{lim} - d - a_1}{4} \right) N + A_{s1} f_{yd} (a_1 - d) - \frac{b d \eta f_{cd} \xi_{lim} (d - a_1)}{4} \geq 0; \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}
M + \left(- \frac{\left((a_1 - d)(8A_{s1}f_{yd} - a_1b\eta f_{cd} + bd\eta f_{cd}) \right)}{4(4A_{s1}f_{yd} - a_1b\eta f_{cd} + bd\eta f_{cd})} \right) N + A_{s1}f_{yd}(a_1 - d) + \\
+ \frac{\left(\frac{b\eta f_{cd}(a_1 + d)}{2} \right) (a_1 - d)(8A_{s1}f_{yd} - b\eta f_{cd}(a_1 - d))}{4(4A_{s1}f_{yd} - b\eta f_{cd}(a_1 - d))} - \\
- \frac{b\eta f_{cd}(a_1^2 - d^2)}{8} - \frac{a_1bd\eta f_{cd}}{4} \geq 0; \tag{3.33}
\end{aligned}$$

$$M + \frac{d}{2}N - \frac{d(2A_{s1}f_{yd} + bd\eta f_{cd}) - a_1bd\eta f_{cd}}{2} \geq 0; \tag{3.34}$$

$$-M + \left(\frac{a_2 - d}{2} \right) N + A_{s2}f_{yd}(a_2 - d) \geq 0; \tag{3.35}$$

$$-M + \left(\frac{a_2 - d + d\xi_{lim}}{2} \right) N + A_{s2}f_{yd}(a_2 - d) - a_2\eta f_{cd}bd\xi_{lim} \geq 0; \tag{3.36}$$

$$-M + \left(\frac{2d\xi_{lim} - d - a_2}{4} \right) N + A_{s2}f_{yd}(a_2 - d) - \frac{bd\eta f_{cd}\xi_{lim}(d - a_2)}{4} \geq 0; \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
-M + \left(- \frac{\left((a_2 - d)(8A_{s2}f_{yd} - a_2b\eta f_{cd} + bd\eta f_{cd}) \right)}{4(4A_{s2}f_{yd} - a_2b\eta f_{cd} + bd\eta f_{cd})} \right) N + \\
+ \frac{\left(\frac{b\eta f_{cd}(a_2 + d)}{2} \right) (a_2 - d)(8A_{s2}f_{yd} - b\eta f_{cd}(a_2 - d))}{4(4A_{s2}f_{yd} - b\eta f_{cd}(a_2 - d))} - \\
- \frac{b\eta f_{cd}(a_2^2 - d^2)}{8} - \frac{a_2bd\eta f_{cd}}{4} + A_{s2}f_{yd}(a_2 - d) \geq 0; \tag{3.38}
\end{aligned}$$

$$-M + \frac{d}{2}N - \frac{d(2A_{s2}f_{yd} + bd\eta f_{cd}) - a_2bd\eta f_{cd}}{2} \geq 0. \tag{3.39}$$

Čia nelygybės (3.30)–(3.34) aprašo viršutinę ($M \geq 0$) srities dalį, o nelygybės (3.35)–(3.39) aprašo apatinę ($M \leq 0$) gelžbetoninio skerspjuvio įrašų sąvei-

kos srities dalį. Viršutinėje srities dalyje nelygybė (3.30) atitinka tiesę 1–2, apatinėje srities dalyje tiesę 1–2 atitinka nelygybė (3.35). Kitų srities aproksimacijos tiesių ir jas aprašančių funkcijų atitikimo išaiškinimas pateikiamas 3.5 lentelėje.

3.5 lentelė. Sąveikos sritį aproksimuojančios tiesės (3.4 pav.) ir jas atitinkančios nelygybės

Table 3.5. Approximation lines of interaction locus (Fig. 3.4) and their equivalent inequalities

Tiesė	1–2		2–6		6–3		3–4		4–5	
Nelygybė	$M \geq 0$	$M \leq 0$	$M \geq 0$	$M \leq 0$	$M \geq 0$	$M \leq 0$	$M \geq 0$	$M \leq 0$	$M \geq 0$	$M \leq 0$
	3.29	3.34	3.30	3.35	3.31	3.36	3.32	3.37	3.33	3.38

3.2.2. Modifikuotas matematinis modelis gelžbetoninių konstrukcijų optimizavimui prisitaikomumo sąlygomis

Poskyryje pateikiamas modifikuotas ribinių įrašų pasiskirstymo rėminėje konstrukcijoje, kurios elementai projektuojami iš simetriškai armuotų stačiakampių gelžbetoninių skerspjūvių, optimizacijos uždavinys:

$$\text{rasti} \quad \min L^T S_0, \quad (3.40)$$

$$\text{kai} \quad AS_r = 0, \quad (3.41)$$

$$\varphi_j = IS_0 - \Phi(S_{ej}(S_0) + S_r) - B \geq 0, \quad (3.42)$$

$$\lambda_j^T [IS_0 - \Phi(S_{ej}(S_0) + S_r) - B] = 0, \quad (3.43)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad \lambda_j = [\lambda_{1j} \lambda_{2j} \dots \lambda_{\zeta j}]^T, \text{ visiems } j \in J, \quad (3.44)$$

$$S_0 \geq S_0^-, \quad (3.45)$$

$$S_0 \leq S_0^+. \quad (3.46)$$

Čia $L = (L_k)$, $k \in K$ ir $S_0 = (S_{0k})$, $k \in K$, kur L_k – elementų k , su ta pačia api-bendrinta ribine įraša, ilgių suma; S_{0k} – k -tojo elemento apibendrintoji ribinė įraš-ža; $\Phi = \text{diag} \Phi_i$ – kvazidiagonalinė tiesinių stiprumo sąlygų (3.30)–(3.39) koeficientų matrica, kur Φ_i yra i -tojo skerspjūvio stiprumo sąlygų koeficientų matrica; $B = [B_1 \ B_2 \ \dots \ B_i]^T$ yra stiprumo sąlygų laisvųjų narių vektorius.

Kvazidiagonalinė i -tojo skerspjuvio tiesinių stiprumo sąlygų koeficientų matrica Φ_i užrašoma taip

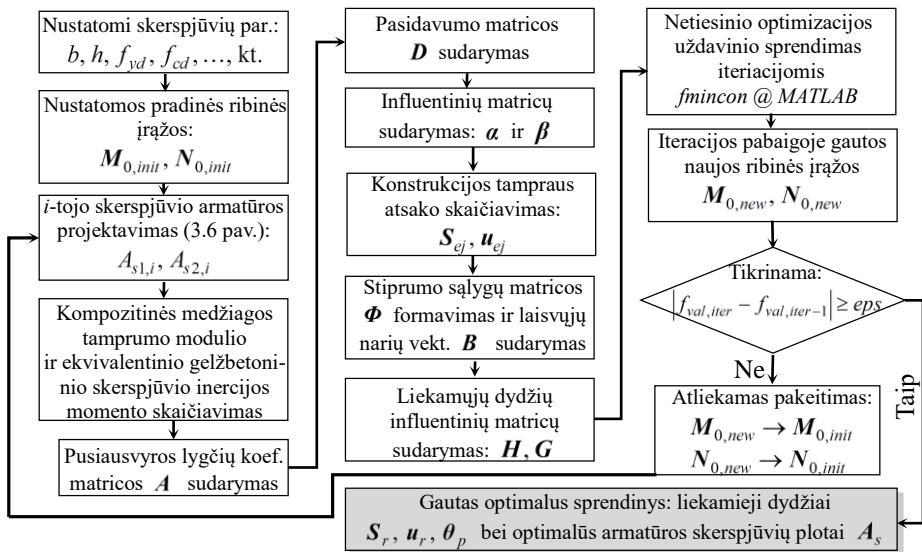
$$\Phi_i = \begin{bmatrix} 1 & \left(\frac{a_{1,i} - d_i}{2} \right) & & & & & \\ & \left(\frac{a_{1,i} - d_i + d_i \xi_{lim,i}}{2} \right) & & & & & \\ & \left(\frac{2d_i \xi_{lim,i} - d_i - a_{1,i}}{4} \right) & & & & & \\ & 1 & \left(- \frac{\left((a_{1,i} - d_i) (8A_{s1,i} f_{yd} - a_{1,i} b_i \eta f_{cd} + b_i d_i \eta f_{cd}) \right)}{4(4A_{s1,i} f_{yd} - a_{1,i} b_i \eta f_{cd} + b_i d_i \eta f_{cd})} \right) & & & & \\ & 1 & \frac{d_i}{2} & & & & \\ & -1 & \left(\frac{a_{2,i} - d_i}{2} \right) & & & & \\ & -1 & \left(\frac{a_{2,i} - d_i + d_i \xi_{lim,i}}{2} \right) & & & & \\ & -1 & \left(\frac{2d_i \xi_{lim,i} - d_i - a_{2,i}}{4} \right) & & & & \\ & -1 & \left(- \frac{\left((a_{2,i} - d_i) (8A_{s2,i} f_{yd} - a_{2,i} b_i \eta f_{cd} + b_i d_i \eta f_{cd}) \right)}{4(4A_{s2,i} f_{yd} - a_{2,i} b_i \eta f_{cd} + b_i d_i \eta f_{cd})} \right) & & & & \\ & -1 & \frac{d_i}{2} & & & & \end{bmatrix},$$

o laisvųjų narių vektorius B_i i -tajam skerspjuviui užrašomas taip

$$\begin{aligned}
B_i = & \left[\begin{aligned}
& A_{i,s1} f_{yd} (a_{1,i} - d_i) \\
& A_{i,s1} f_{yd} (a_{1,i} - d_i) - a_{1,i} \eta f_{cd} b_i d_i \xi_{lim} \\
& A_{i,s1} f_{yd} (a_{1,i} - d_i) - \frac{b_i d_i \eta f_{cd} \xi_{lim} (d_i - a_{1,i})}{4} \\
& A_{i,s1} f_{yd} (a_{1,i} - d_i) + \frac{\left(\frac{b_i \eta f_{cd} (a_{1,i} + d_i)}{2} \right) (a_{1,i} - d_i) (8 A_{i,s1} f_{yd} - b_i \eta f_{cd} (a_{1,i} - d_i))}{4 (4 A_{i,s1} f_{yd} - b_i \eta f_{cd} (a_{1,i} - d_i))} - \\
& - \frac{b_i \eta f_{cd} (a_{1,i}^2 - d_i^2)}{8} - \frac{a_{1,i} b_i d_i \eta f_{cd}}{4} \\
& - \frac{d_i (2 A_{i,s1} f_{yd} + b_i d_i \eta f_{cd}) - a_{1,i} b_i d_i \eta f_{cd}}{2} \\
& A_{i,s2} f_{yd} (a_{2,i} - d_i) \\
& A_{i,s2} f_{yd} (a_{2,i} - d_i) - a_{2,i} \eta f_{cd} b_i d_i \xi_{lim} \\
& A_{i,s2} f_{yd} (a_{2,i} - d_i) - \frac{b_i d_i \eta f_{cd} \xi_{lim} (d_i - a_{2,i})}{4} \\
& A_{i,s2} f_{yd} (a_{2,i} - d_i) + \frac{\left(\frac{b_i \eta f_{cd} (a_{2,i} + d_i)}{2} \right) (a_{2,i} - d_i) (8 A_{i,s2} f_{yd} - b_i \eta f_{cd} (a_{2,i} - d_i))}{4 (4 A_{i,s2} f_{yd} - b_i \eta f_{cd} (a_{2,i} - d_i))} - \\
& - \frac{b_i \eta f_{cd} (a_{2,i}^2 - d_i^2)}{8} - \frac{a_{2,i} b_i d_i \eta f_{cd}}{4} \\
& - \frac{d_i (2 A_{i,s2} f_{yd} + b_i d_i \eta f_{cd}) - a_{2,i} b_i d_i \eta f_{cd}}{2}
\end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

Uždavinyje (3.39)–(3.45) nežinomieji yra elementų ribinės įrašos S_{0k} , $k \in K$ ir plastinių daugiklių vektoriai λ_j , $j \in J$. Sąlygos (3.45) ir (3.46) ribojančios minimalias S_0^- ir maksimalias S_0^+ ribinių įrašų S_0 reikšmes atlieka konstrukcinių apribojimų funkciją.

Apibendrintas uždavinio (3.40)–(3.46) sprendimo algoritmas pavaizduotas schemeje 3.6 paveiksle.



3.6 pav. Ribinių įrašų optimalaus pasiskirstymo uždavinio sprendimo iteracijomis principinė schema

Fig. 3.6. Flowchart of the principal procedure for finding the optimal limit internal forces distribution

Pastaba. Čia pasidavumo matrica sudaroma įvertinant transformuoto skerspjūvio ir kompozitinės medžiagos parametrus $D(I_{tr}, A_{tr}, E_{comp})$. Skerspjūvio parametrų (I_{tr}, A_{tr}) transformacija atliekama perskaičiuojant skerspjūvį sudarančio betono dalį į plieninės armatūros skerspjūvio dalį, tai atliekama pasitelkus transformacijos metodus aprašytus Beardmore (Beardmore 2011). Gelžbetonio kaip kompozitinės medžiagos tamprumo modulis nustatomas pasitelkus *Mišinių Taisyklę* ir *Atvirkštinę Mišinių Taisyklę* (DoITPoMS 2004).

Ekscentriškai gniuždomų gelžbetoninių skerspjūvių reikalingos armatūros projektavimas atliekamas pagal Eurokodo 2 (LST EN 1992-1-1:2005 2007) reikalavimus. Principinė armatūros projektavimo schema pateikiama 3.7 paveiksle.

Paaškinami žymėjimai, naudojami 3.7 paveiksle: $M_0 = M_{0,tr}(I_{tr})$ ir $N_0 = N_{0,tr}(A_{tr})$ atitinkamai transformuoto gelžbetoninio (simetriškai armuoto) skerspjūvio ribinis lenkimo momentas ir ribinė ašinė jėga; e – vidinių jėgų santykis (ašinės jėgos ekscentricitetas nuo skerspjūvio centro); e_1 ir e_2 yra ekscentricitetai (pagal 3.5 pav.); b ir h atitinkamai gelžbetoninio skerspjūvio plotis ir aukštis; d – atstumas nuo projekcinės armatūros strypų centro iki priešingo

išorinio gelžbetoninio skerspjuvio paviršius; a_1 ir a_2 yra armatūros švaros koeficientai; f_{yd} – skaičiuotinis armatūros plieno stipris pagal takumo ribą; κ_s – armatūros plieno stiprio pagal takumo ribą redukcijos koeficientas; x_{eff} – efektyvusis betono gniuždomosios zonos aukštis; $x_{eff,lim}$ – ribinis efektyvusis betono gniuždomosios zonos aukštis; x' – betono gniuždomosios zonos ekvivalentinis aukštis; ρ – reikalingo armavimo koeficientas; ρ_{min} , ρ_{max} – atitinkamai minimalaus ir maksimalaus reikalingo armavimo koeficientai.

3.2.3. Gelžbetoninio rėmo optimizavimo skaitinis eksperimentas

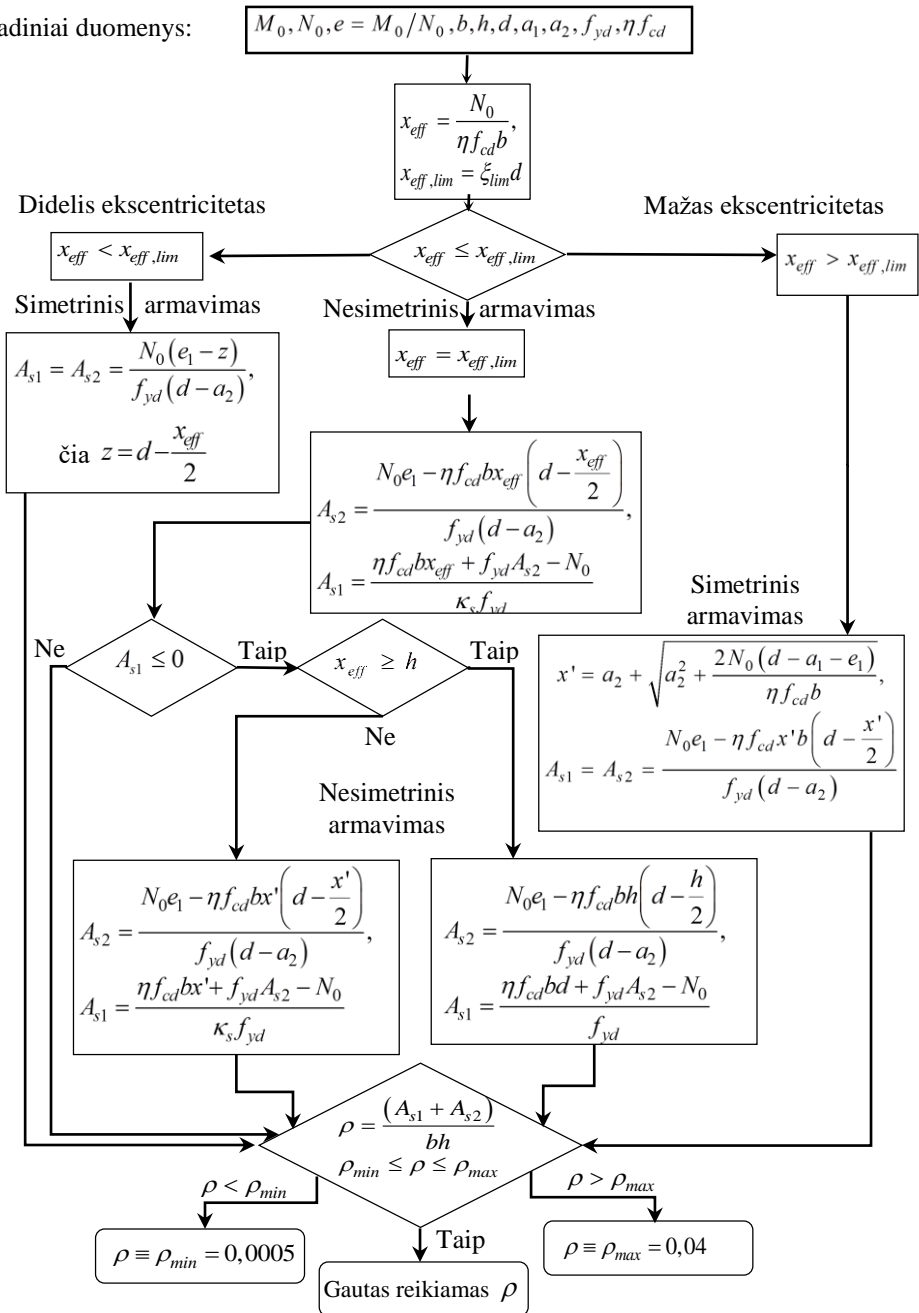
Nagrinėjamas dviejų aukštų rėmas, kurio elementai projektuojami iš gelžbetoninių simetriškai armuotų stačiakampių skerspjuvių. Rėmas yra apkrautas dviem, laisvai parinktomis (skaitnis eksperimentas yra akademinio pobūdžio, todėl realių apkrovų neieškoma), nepriklausomai kintančiomis kartotinėmis jėgomis: vertikalia $0 \text{ kN} \leq F_1 \leq 160 \text{ kN}$ ir horizontalia $-120 \text{ kN} \leq F_2 \leq 100 \text{ kN}$ (3.7 pav.). Galimos apkrovų kombinacijos pateikiamos 3.6 lentelėje. Sprendžiamas ribinių įrašų optimalaus pasiskirstymo, prisitaikiusioje konstrukcijoje, uždavinys pagal modifikuotą matematinį modelį (3.40)–(3.46).

Konstrukcijos diskretinis modelis pavaizduotas 3.8 paveiksle. Rėmo diskretinį modelį sudaro 8 baigtiniai strypiniai elementai, kiekvieno elemento gale įvedamas skaičiuotinis pjūvis (2 pjūviai elemente). Rėmas yra 6 kartus statiskai neišsprendžiamas, diskretinio modelio įrašų skaičius yra 24, o kinematinio neišsprendžiamumo laipsnis (galimų globalių mazgų poslinkių skaičius) yra 18. Kiekviename elemento pjūvyje skaičiuojamas lenkimo momentas (2 elemente) ir viena ašinė jėga elemento ilgyje.

Pradiniai geometriniai skerspjuvių parametrai ir armatūros skerspjuvių plotai apskaičiuoti pagal pradines ribines įrašas yra pateikti 3.7 lentelėje.

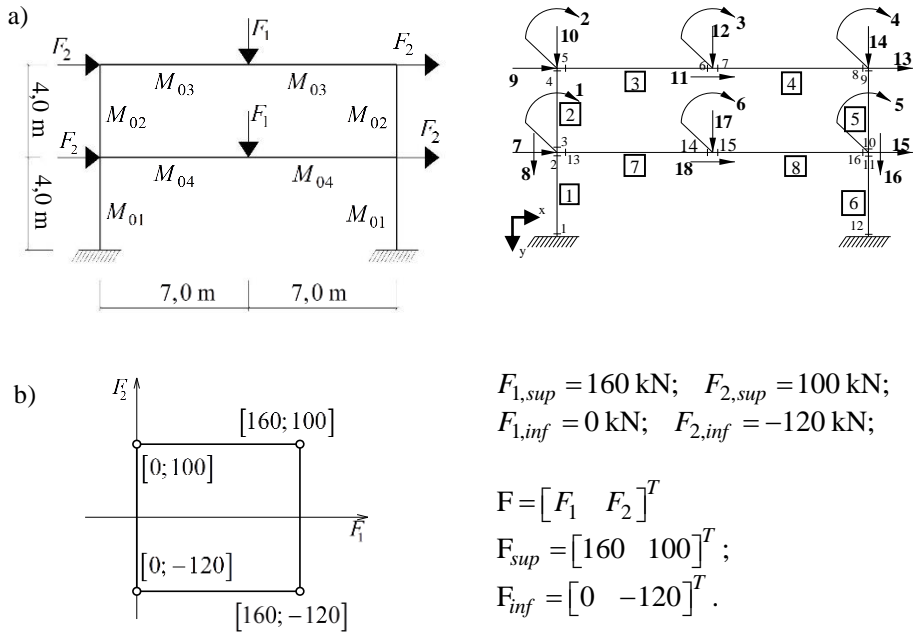
Optimalus uždavinio (3.39)–(3.45) sprendinys buvo gautas po aštuonių iteracijų. Optimalaus sprendinio tikslo funkcijos reikšmė yra $f_{val}^* = 1,8633 \times 10^4$ (3.9 pav.). Optimalaus sprendinio tikslo funkcijos reikšmė 1,17 % didesnė nei pradinė tikslo funkcijos reikšmė $f_{val}^0 = 1,8415 \times 10^4$ (prie priimtų pradinių skerspjuvių parametrų). Nors skirtumas tarp tikslo funkcijų nėra žymus, tačiau tai turi ženklų įtaką (> 65 %) armatūros skerspjuvių plotų pokyčiui. 3.7 lentelėje pateikti optimalūs reikalingos armatūros skerspjuvių plotai ir geometrinės rėmo elementų skerspjuvių charakteristikos.

Pradiniai duomenys:



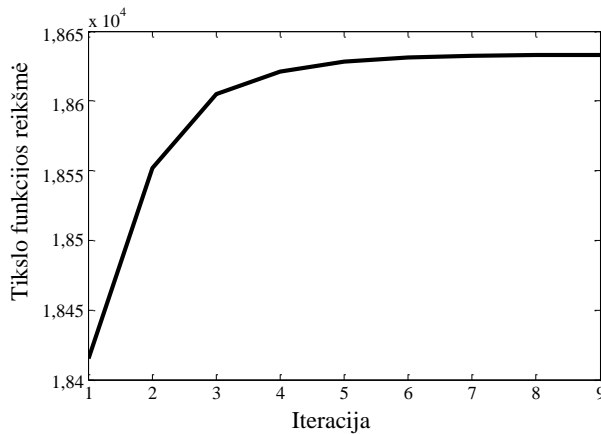
3.7 pav. Reikalingo armavimo projektavimo principinė schema

Fig. 3.7. Flowchart of required reinforcement design procedure



3.8 pav. Rėminės konstrukcijos diskretinis modelis: a) skaičiuojamoji schema;
b) apkrovos kitimo sritis

Fig. 3.8. Discrete model of the frame structure: a) calculation scheme;
b) load variation locus



3.9 pav. Optimalaus sprendinio konvergavimas iteraciniame procese
Fig. 3.9. Optimal solution convergence during the iterative procedure

3.6 lentelė. Apkrovų kombinacijos**Table 3.6.** Load combinations

Horizontali apkrova iš kairės	Horizontali apkrova iš dešinės
Komb. I: $F_{1,sup} + F_{2,sup}$	Komb. II: $F_{1,sup} + F_{2,inf}$
Komb. III: $F_{1,inf} + F_{2,sup}$	Komb. IV: $F_{1,inf} + F_{2,inf}$

Pagal 3.7 lentelėje pateiktus duomenis, parenkamas toks pradinis armavimas pagal (LST EN 10080:2006 2006):

$$M_{01}: A_{s1,1}^0 = A_{s2,1}^0 = 12,19 \text{ cm}^2, \text{ parenkama } 2 \times 2\emptyset 28 \left(2 \times 12,32 \text{ cm}^2 \right);$$

$$M_{02}: A_{s1,2}^0 = A_{s2,2}^0 = 5,0 \text{ cm}^2, \text{ parenkama } 2 \times 2\emptyset 18 \left(2 \times 5,08 \text{ cm}^2 \right);$$

$$M_{03}: A_{s1,3}^0 = A_{s2,3}^0 = 3,96 \text{ cm}^2, \text{ parenkama } 2 \times 2\emptyset 16 \left(2 \times 4,02 \text{ cm}^2 \right);$$

$$M_{04}: A_{s1,4}^0 = A_{s2,4}^0 = 12,84 \text{ cm}^2, \text{ parenkama } 2 \times 2\emptyset 32 \left(2 \times 16,08 \text{ cm}^2 \right).$$

Atitinkamai parenkama armatūra pagal optimalius rezultatus:

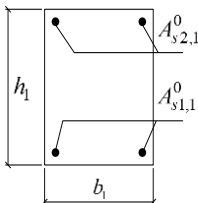
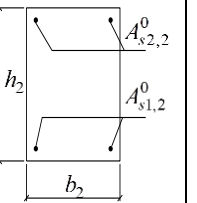
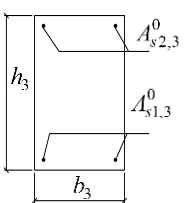
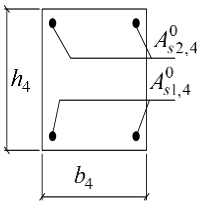
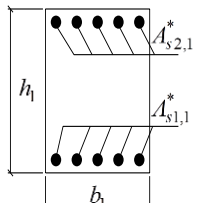
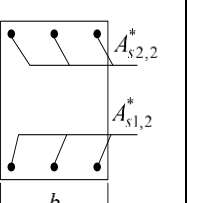
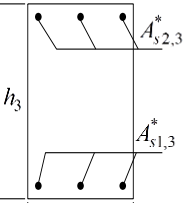
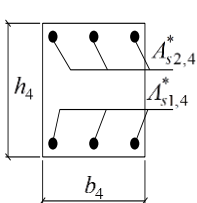
$$M_{01}: A_{s1,1}^* = A_{s2,1}^* = 62,29 \text{ cm}^2, \text{ parenkama } 2 \times 5\emptyset 40 \left(2 \times 62,85 \text{ cm}^2 \right);$$

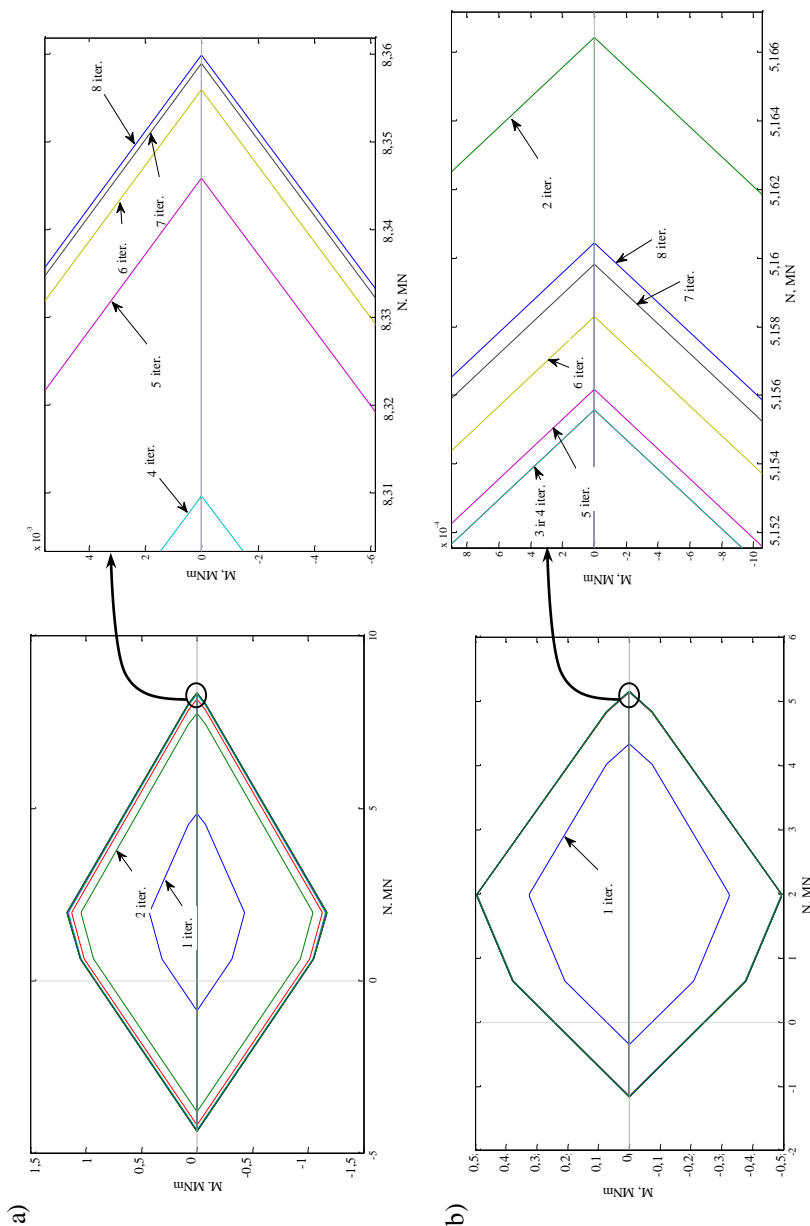
$$M_{02}: A_{s1,2}^* = A_{s2,2}^* = 16,58 \text{ cm}^2, \text{ parenkama } 2 \times 3\emptyset 28 \left(2 \times 18,48 \text{ cm}^2 \right);$$

$$M_{03}: A_{s1,3}^* = A_{s2,3}^* = 12,76 \text{ cm}^2, \text{ parenkama } 2 \times 3\emptyset 25 \left(2 \times 14,73 \text{ cm}^2 \right);$$

$$M_{04}: A_{s1,4}^* = A_{s2,4}^* = 30,88 \text{ cm}^2, \text{ parenkama } 2 \times 3\emptyset 36 \left(2 \times 30,54 \text{ cm}^2 \right).$$

3.8 lentelė. Pradiniai ir optimalūs skerspjūvių parametrai**Table 3.8.** Initial and optimal sectional properties

	Elementai su M_{01}	Elementai su M_{02}	Elementai su M_{03}	Elementai su M_{04}
Pradiniai parametrai				
	$M_{01}^0 = 195,0 \text{ kNm}$ $N_{01}^0 = 64,0 \text{ kN}$ $b_1 = 0,4 \text{ m}$ $h_1 = 0,5 \text{ m}$ $A_{1,tr}^0 = 0,0188 \text{ m}^2$ $I_{1,tr}^0 = 0,0017 \text{ m}^4$ $E_{1,comp}^0 = 31,0 \text{ GPa}$ $A_{s1,1}^0 = 12,19 \text{ cm}^2$ $A_{s2,1}^0 = 12,19 \text{ cm}^2$ $\rho_1^0 = 0,0030$	$M_{02}^0 = 79,0 \text{ kNm}$ $N_{02}^0 = 22,0 \text{ kN}$ $b_2 = 0,4 \text{ m}$ $h_2 = 0,5 \text{ m}$ $A_{2,tr}^0 = 0,0075 \text{ m}^2$ $I_{2,tr}^0 = 0,0007 \text{ m}^4$ $E_{2,comp}^0 = 29,8 \text{ GPa}$ $A_{s1,2}^0 = 5,0 \text{ cm}^2$ $A_{s2,2}^0 = 5,0 \text{ cm}^2$ $\rho_2^0 = 0,0013$	$M_{03}^0 = 79,0 \text{ kNm}$ $N_{03}^0 = 23,0 \text{ kN}$ $b_3 = 0,4 \text{ m}$ $h_3 = 0,6 \text{ m}$ $A_{3,tr}^0 = 0,0062 \text{ m}^2$ $I_{3,tr}^0 = 0,0009 \text{ m}^4$ $E_{3,comp}^0 = 29,6 \text{ GPa}$ $A_{s1,3}^0 = 3,96 \text{ cm}^2$ $A_{s2,3}^0 = 3,96 \text{ cm}^2$ $\rho_3^0 = 0,0012$	$M_{04}^0 = 144,0 \text{ kNm}$ $N_{04}^0 = 1,0 \text{ kN}$ $b_4 = 0,4 \text{ m}$ $h_4 = 0,4 \text{ m}$ $A_{4,tr}^0 = 0,0165 \text{ m}^2$ $I_{4,tr}^0 = 0,0012 \text{ m}^4$ $E_{4,comp}^0 = 31,7 \text{ GPa}$ $A_{s1,4}^0 = 12,84 \text{ cm}^2$ $A_{s2,4}^0 = 12,84 \text{ cm}^2$ $\rho_4^0 = 0,0026$
Optimalūs parametrai				
	$M_{01}^* = 957,0 \text{ kNm}$ $N_{01}^* = 172,8 \text{ kN}$ $b_1 = 0,4 \text{ m}$ $h_1 = 0,5 \text{ m}$ $A_{1,tr}^* = 0,0883 \text{ m}^2$ $I_{1,tr}^* = 0,0083 \text{ m}^4$ $E_{1,comp}^* = 39,6e^6 \text{ kN/m}^2$ $A_{s1,1}^* = 62,29 \text{ cm}^2$ $A_{s2,1}^* = 62,29 \text{ cm}^2$ $\rho_1^* = 0,0156$	$M_{02}^0 = 79,0 \text{ kNm}$ $N_{02}^0 = 22,0 \text{ kN}$ $b_2 = 0,4 \text{ m}$ $h_2 = 0,5 \text{ m}$ $A_{2,tr}^0 = 0,0075 \text{ m}^2$ $I_{2,tr}^0 = 0,0007 \text{ m}^4$ $E_{2,comp}^0 = 29,8e^6 \text{ kN/m}^2$ $A_{s1,2}^0 = 5,0 \text{ cm}^2$ $A_{s2,2}^0 = 5,0 \text{ cm}^2$ $\rho_2^0 = 0,0013$	$M_{03}^0 = 79,0 \text{ kNm}$ $N_{03}^0 = 23,0 \text{ kN}$ $b_3 = 0,4 \text{ m}$ $h_3 = 0,6 \text{ m}$ $A_{3,tr}^0 = 0,0062 \text{ m}^2$ $I_{3,tr}^0 = 0,0009 \text{ m}^4$ $E_{3,comp}^0 = 29,6e^6 \text{ kN/m}^2$ $A_{s1,3}^0 = 3,96 \text{ cm}^2$ $A_{s2,3}^0 = 3,96 \text{ cm}^2$ $\rho_3^0 = 0,0012$	$M_{04}^0 = 144,0 \text{ kNm}$ $N_{04}^0 = 1,0 \text{ kN}$ $b_4 = 0,4 \text{ m}$ $h_4 = 0,4 \text{ m}$ $A_{4,tr}^0 = 0,0165 \text{ m}^2$ $I_{4,tr}^0 = 0,0012 \text{ m}^4$ $E_{4,comp}^0 = 31,7e^6 \text{ kN/m}^2$ $A_{s1,4}^0 = 12,84 \text{ cm}^2$ $A_{s2,4}^0 = 12,84 \text{ cm}^2$ $\rho_4^0 = 0,0026$



3.10 pav. Gelžbetoninio skerspjūvio stiprumo srities kitimas iteracijose: ribinė įraša a) M_{01} ; b) M_{02}
Fig. 3.10. Iterative changes of the strength loci of reinforced concrete cross-section: limiting bending moment
 a) M_{01} ; b) M_{02}

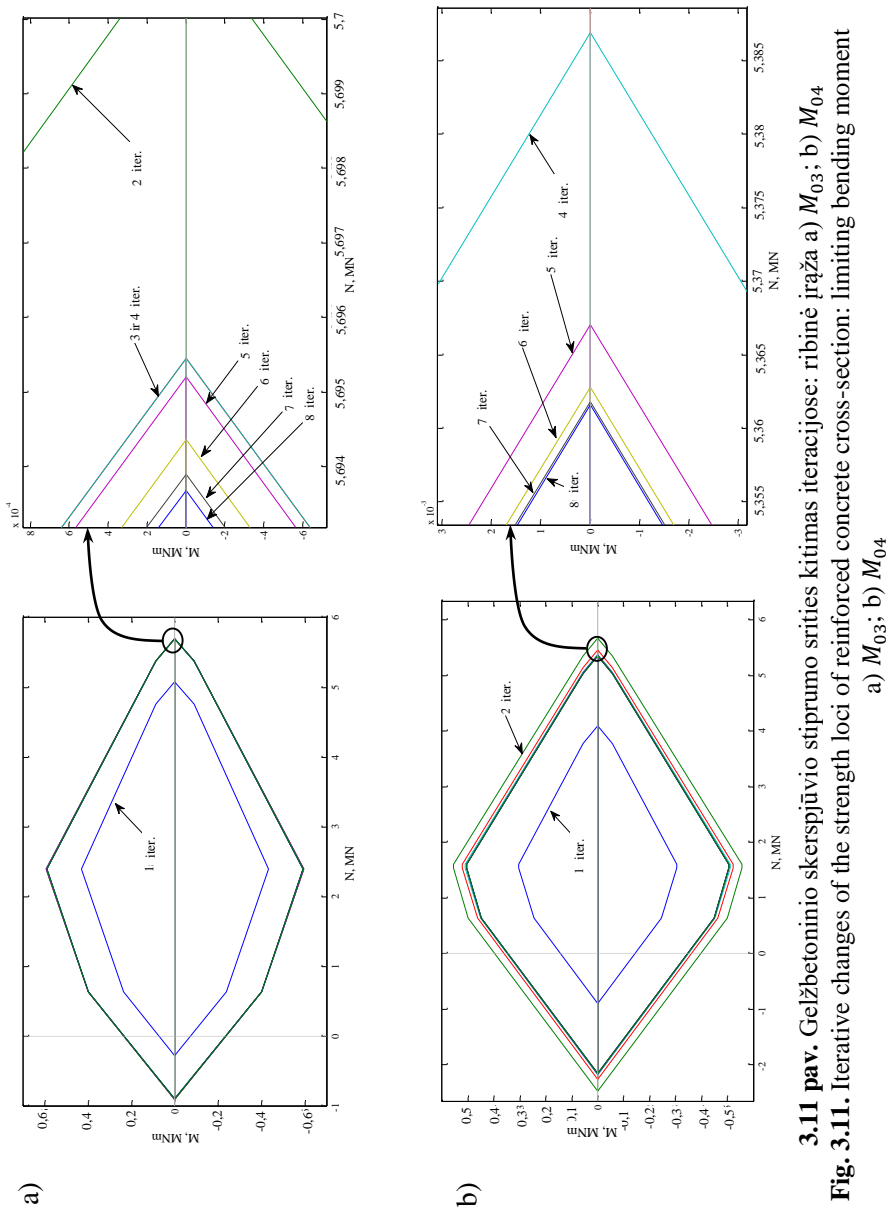


Fig. 3.11. Iterative changes of the strength loci of reinforced concrete cross-section: limiting bending moment

Optimizavimo uždavinio sprendimas iteracijomis leidžia parodyti, kaip kinta gelžbetoninio skerspjūvio stiprumo sritis iteracijose (3.10–3.11 pav.). Kiekvienos naujos iteracijos pradžioje patikslinama stiprumo sritis pagal ankstesnėje iteracijoje gautus skerspjūvių parametrus.

Kaip matyti iš 3.10–3.11 paveikslų, gelžbetoninio skerspjūvio stiprumo srities pokytis iteracijose nėra žymus ir ne visada vienos krypties (sritis gali ir trauktis), tai priklauso nuo įrašų persiskirstymo konstrukcijoje, kol ji pasiekia prisitaikomo būvį paskutinėje iteracijoje. Parinktieji pradiniai ir optimalūs armatūros skerspjūvių plotai optimizuojant tenkina gelžbetoninio skerspjūvio stiprumo sąlygas, kiekviename skaičiuojamajame pjūvyje.

3.3. Trečiojo skyriaus išvados

1. Skaitiniais eksperimentais parodyta, jog taikant optimizavimo uždavinio matematinį modelį (3.1)–(3.11) su patikslintomis (pagal konstrukcijos skenavimo rezultatus) liekamųjų poslinkių ribomis, optimalus pasirinktos geometrijos plieninės rėminės konstrukcijos tūris gaunamas 8,05 % didesnis, negu poslinkių neribojant. Ribiniai lenkimo momentai gaunami atitinkamai 26,12 % (M_{01}^*), 17,06 % (M_{02}^*) didesni, o M_{03}^* gaunamas 2,05 % mažesnis atsižvelgiant į poslinkių ribojimo sąlygas.
2. Ribinės įrašos minimumo (konstrukciniai apribojimai dėl ribinio liaunio reikalavimų) optimizavimo uždavinio sprendimą pasirinktos geometrijos rėmui daro neefektyvų dėl pernelyg liaunos geometrijos. Įvedus papildomus ryšius (sumažinus konstrukcijos liaunumą) minėta sąlyga yra taikytina.
3. Optimizavimo uždavinio sprendimo MATLAB paprograme *fmincon* algoritmo pasirinkimas priklauso nuo pageidaujamo rezultatų tikslumo.
4. Nuo sprendimo algoritmo pasirinkimo priklauso uždavinio sprendimo laikas. Disertaciniame darbe taikant pasirinktą algoritmą optimizavimo uždavinys išspręstas greičiausiai (10 iteracijų sprendimas truko apie 5 valandas, taikant pagal nutylėjimą parinktus tikslumo parametrus).
5. Gelžbetoninio rėmo skaitinis eksperimentas parodė, jog taikant autoriaus išvestas skerspjūvio stiprumo sąlygas ir atitinkamai modifikavus optimizavimo uždavinio matematinio modelio apribojimus, matematinį modelį galima taikyti gelžbetoninės konstrukcijos reikalingos armatūros skerspjūvių plotų optimizavimui.
6. Sukurtas algoritmas MATLAB aplinkoje gelžbetoninių rėminių konstrukcijų armatūros parinkimui pagal projektavimo normų reikalavi-

mus. Algoritmas integruotas į optimizavimo uždavinio sprendimo algoritmą. Tai leidžia betarpiškai gauti optimalios reikalingos armatūros skerspjūvių plotų reikšmes.

7. Optimizavimo rezultatais parodyta, kad prie kintamos kartotinės apkrovos prisitaikančių gelžbetoninių rėminių konstrukcijų elementų skerspjūvių optimalus armavimo pobūdis yra simetrinis.

Optimizavimo prisitaikomumo sąlygomis rezultatų kontrolė

Kompiuteriai ir informacinės technologijos labai palengvina sudėtingų konstrukcijų analizės ir optimizavimo uždavinių sprendimą. Naudojantis pramoninėmis kompiuterinėmis programomis, būtina suprasti, kokiais matematiniais modeliais remiasi jų veikimo principas, siekiant išvengti neatitinkančių realios situacijos skaičiavimo rezultatų (Narvydas 2011). Lengvai išsprendus uždavinį atsiranda pagundų nekritiškai vertinti gautus rezultatus, neskirti pakankamai dėmesio inžinerinės patirties ir žinių reikalaujančioms analizės dalims, susijusioms su uždavinio formulavimu, daromų prielaidų esmės supratimu, tinkamų sprendimo metodų parinkimu ir pačių rezultatų kontrole itin atsakingoms konstrukcijoms. Šiame disertacijos skyriuje aiškinama metodika, kaip, pasitelkus Rozeno projektuojamų gradientų metodą (Rosen 1961, 1960), patikrinti ar gautas MATLAB kompiuterine sistema optimalus apvalios plokštės sprendinys (Blaževičius *et al.* 2014) tenkina plokštės prisitaikomumo sąlygas (Atkočiūnas 2012; Blaževičius *et al.* 2014). Metodika gali būti apibendrinta ir kitų konstrukcijų optimizavimo uždavinių sprendinių kontrolei.

Skyriaus tema disertacijos autorius yra paskelbęs dvi publikacijas (Alawdin *et al.* 2016; Blaževičius *et al.* 2016).

4.1. Prisitaikančios apvalios plokštės optimizavimo uždavinio matematinis modelis

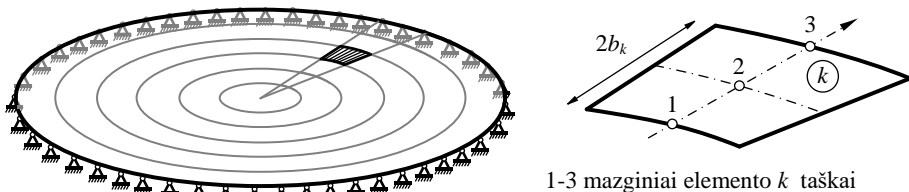
Trumpai aptariamas nagrinėjamos žinomos geometrijos apvalios plokštės diskretinio modelio sudarymas. Apvalios plokštės diskretinis modelis gaunamas ją suskirstant į s baigtinių elementų, kurių kiekvienas turi ν mazginių taškų (4.1 pav.). Todėl bendras, apvalios plokštės diskretinio modelio, skaičiuojamųjų pjūvių skaičius yra $\zeta = s \times \nu$. Diskretinio modelio įtempių deformacijų būvį nusako ζ lenkimo momentų vektorių $\mathbf{M} = [\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \dots \mathbf{M}_\zeta]^T$ ir plastinių deformacijų vektorių $\boldsymbol{\Theta} = [\boldsymbol{\Theta}_1 \boldsymbol{\Theta}_2 \dots \boldsymbol{\Theta}_\zeta]^T$. Plokštės pusiausvyros ir geometrinės lygtys užrašomos taip:

$$\sum_k \mathbf{A}_k \mathbf{M}_k = \mathbf{F} \text{ arba } \mathbf{A} \mathbf{M} = \mathbf{F}, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{A}_k^T \mathbf{u} - \mathbf{D}_k \mathbf{M}_k = \mathbf{0} \text{ arba } \mathbf{A}^T \mathbf{u} - \mathbf{D} \mathbf{M} = \mathbf{0}, \quad (4.2)$$

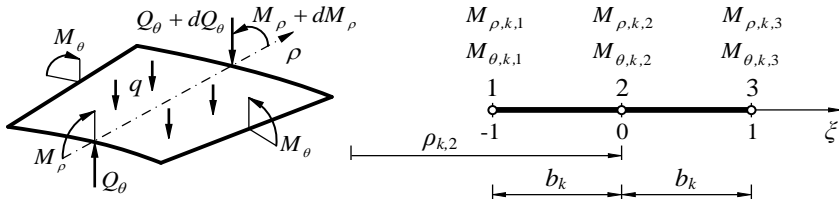
$$k = 1, 2, \dots, s, \quad k \in K.$$

Čia $\mathbf{A} (m \times n)$ yra pusiausvyros lygčių koeficientų matrica, m – diskretinio modelio laisvumo laipsnis, n – įrašų skaičius; $\mathbf{D} (n \times n)$ – diagonalinė elementų pasidavimų \mathbf{D}_k matrica ir $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m]^T$ yra globalinių poslinkių vektorius. Interpoliacinė lenkimo momentų funkcija sudaroma taikant pusiausviro baigtinio elemento formos funkciją $N_k(\rho)$ yra $\mathbf{M}_k(\rho) = N_k(\rho) \mathbf{M}_k$ (Atkočiūnas *et al.* 2004; Blaževičius *et al.* 2014).



4.1 pav. Apvali simetrinė plokštė ir žiedinis baigtinis elementas su trimis mazgais

Fig. 4.1. A symmetric circular plate and a circular finite element having three nodes



4.2 pav. Apvalios plokštės baigtinis elementas ir teigiamos įrašų kryptys. Ryšys tarp globalių ir lokalių koordinačių (Blaževičius *et al.* 2014)

Fig. 4.2. A finite element of a circular symmetric plate and its positive internal forces. Relation between global and local coordinates (Blaževičius *et al.* 2014)

Netiesinės Von Mizeso (Von Mises) takumo sąlygos tikrinamos kiekviename mazginiame taške $i = 1, 2, \dots, \zeta$ ($i \in I$):

$$\varphi_i = (M_{0i})^2 - \mathbf{M}_i^T \mathbf{II}_i \mathbf{M}_i \geq 0, \quad (4.3)$$

$$\varphi_i = (M_{0i})^2 - \begin{bmatrix} M_{\rho i} & M_{\theta i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ -0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{\rho i} \\ M_{\theta i} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4.4)$$

Laikoma, jog ribinis lenkimo momentas M_{0i} yra pastovus baigtinio elemento plote. Radialinis $M_{\rho i}$ ir žiedinis $M_{\theta i}$ lenkimo momentai aprašo apvalios plokštės įtempių ir deformacijų būvį.

Analizuojant prisitaikiusios plokštės rezultatus įprasta išskirti liekamuosius momentus \mathbf{M}_r , poslinkius \mathbf{u}_r ir liekamasias deformacijas $\boldsymbol{\Theta}_r = \mathbf{D}\mathbf{M}_r + \boldsymbol{\Theta}_p$. Konkretus apkrovimo procesas $\mathbf{F}(t)$ aprašomas nuo laiko nepriklausančiomis viršutine \mathbf{F}_{sup} ir apatine \mathbf{F}_{inf} ribomis ($\mathbf{F}_{inf} \leq \mathbf{F}(t) \leq \mathbf{F}_{sup}$). Jeigu egzistuoja $j = 1, 2, \dots, p$ ($j \in J$) apkrovų $\mathbf{F}(t)$ kitimo srities viršūnių, tada tamprūs momentai \mathbf{M}_{ej} ir poslinkiai \mathbf{u}_{ej} skaičiuojami taikant influentines tamprių dydžių matricas žinomomis formulėmis (1.14) $\mathbf{u}_{ej} = \boldsymbol{\beta}\mathbf{F}_j$, $\mathbf{M}_{ej} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{F}_j$. Tuomet, neatliekant detalios apkrovimo istorijos analizės, takumo sąlygos (4.3) užrašomos tokia forma:

$$\varphi_{ij} = (M_{0i})^2 - \mathbf{M}_{ij}^T \mathbf{II}_i \mathbf{M}_{ij} \geq 0, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{M}_{i,j} = \mathbf{M}_{ei,j} + \mathbf{M}_{ri}, \quad i \in I, \quad j \in J. \quad (4.6)$$

Tokiu atveju, pusiausvyros (4.1) ir geometrinės (4.2) lygtys yra:

$$\mathbf{A}\mathbf{M}_r = \mathbf{0}, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{u}_r = \mathbf{D}\mathbf{M}_r + \boldsymbol{\Theta}_p. \quad (4.8)$$

Čia $\boldsymbol{\Theta}_p = [\boldsymbol{\Theta}_{pi}]^T$ yra plastinių deformacijų vektorius. Kiekvienam skerspjūviui $\boldsymbol{\Theta}_{pi}$ yra toks:

$$\boldsymbol{\Theta}_{pi} = 2 \sum_j \lambda_{ij} \boldsymbol{\Pi}_i \mathbf{M}_{ij}, \quad \lambda_{ij} \geq 0, \quad i \in I, \quad j \in J. \quad (4.9)$$

Gavus pagrindines diskretines plokštės priklausomybes, galima sudaryti prisitaikančios apvalios lenkiamos plokštės optimizavimo uždavinio matematinį modelį:

$$\text{rasti} \quad \min \quad \mathcal{W}(\mathbf{M}_0), \quad (4.9)$$

$$\text{kai} \quad \mathbf{A}\mathbf{M}_r = \mathbf{0}, \quad (4.10)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_j = (\mathbf{M}_0)^2 - \boldsymbol{\Gamma}^T [\mathbf{M}_{ej}(\mathbf{M}_0) + \mathbf{M}_r]^T \boldsymbol{\Pi} [\mathbf{M}_{ej}(\mathbf{M}_0) + \mathbf{M}_r] \geq \mathbf{0}, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{M}_0)\mathbf{M}_r + 2 \sum_j \boldsymbol{\Pi}^T [\mathbf{M}_{ej}(\mathbf{M}_0) + \mathbf{M}_r]^T \boldsymbol{\lambda}_j - \mathbf{A}^T \mathbf{u}_r = \mathbf{0}, \quad (4.12)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_j^T \boldsymbol{\varphi}_j = 0, \quad \boldsymbol{\lambda}_j \geq \mathbf{0}, \quad (4.13)$$

$$\mathbf{M}_0 \geq \mathbf{M}_{0,min}, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}_{ej} + \mathbf{u}_r \leq \mathbf{u}_{max}, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{M}_{ej}(\mathbf{M}_0) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{M}_0)\mathbf{F}_j, \quad \mathbf{u}_{ej}(\mathbf{M}_0) = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{M}_0)\mathbf{F}_j, \quad j \in J. \quad (4.16)$$

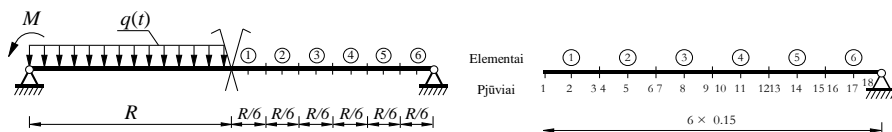
Čia tikslo funkcija $\min \mathcal{W}(\mathbf{M}_0) = \min \mathbf{A}^T \mathbf{M}_0$ išreiškia ribinių įrašų \mathbf{M}_0 optimalų pasiskirstymą, o \mathbf{L} yra elementų plotų vektorius. Takumo sąlygų (4.11) konfigūracijos matrica $\boldsymbol{\Gamma}$ plokštės diskretiniam modeliui užrašoma taip:

$$\Gamma \equiv \begin{bmatrix} [M_{e1,j} + M_{r1}]^T & & & \\ & [M_{e2,j} + M_{r2}]^T & & \\ & & \dots & \\ & & & [M_{e\zeta,j} + M_{r\zeta}]^T \end{bmatrix}.$$

Matrica Π yra kvazidiagonalinė, jos nariai yra Von Mizeso takumo sąlygų (4.5) matricos Π_i , $i = 1, 2, \dots, \zeta$. Matematiniam modelyje sąlygos (4.14) yra konstrukcinio pobūdžio. Uždavinys yra sprendžiamas iteracijomis. Kiekvienoje iteracijoje perskaičiuojama matrica $D(M_0)$, tai reiškia jog influentinės įrašų $\alpha(M_0)$ ir poslinkių $\beta(M_0)$ matricos iteracijose kinta. Uždavinio (4.9)–(4.16) sprendimo rezultatai yra optimalūs M_0^* , M_r^* , λ_j^* , u_r^* (4.2 lentelė).

4.2. Skaitiniai plokštės optimizavimo MATLAB sistema rezultatai

Nagrinėjama apvali kontūrų lankstais įtvirtinta plokštė, kurios spindulys yra $R = 0,9$ m (4.3 pav). Plokštė veikiama simetrinės ir tolygiai paskirstytos apkrovos kintančios ribose $-95 \text{ kN/m}^2 \leq q(t) \leq 100 \text{ kN/m}^2$, taip pat veikiama tolygiai paskirstyto išoriniu plokštės kontūrų lenkimo momento $M = 36,25 \text{ kN}$. Plokštės medžiagos tamprumo modulis yra $E = 210 \text{ GPa}$, medžiagos takumo įtempių reikšmė – $\sigma_y = 210 \text{ MPa}$, Puasono (Poisson's) koeficientas $\nu = 1/3$, pradinis plokštės storis $t = 0,03$ m. Galimas plokštės centro įlinkis yra ribojamas $-0,03 \text{ m} \leq u_{r,1} + u_{ej,1} \leq 0,03 \text{ m}$.



4.3 pav. Diskretinis plokštės modelis ($s = 6$, $\nu = 3$)

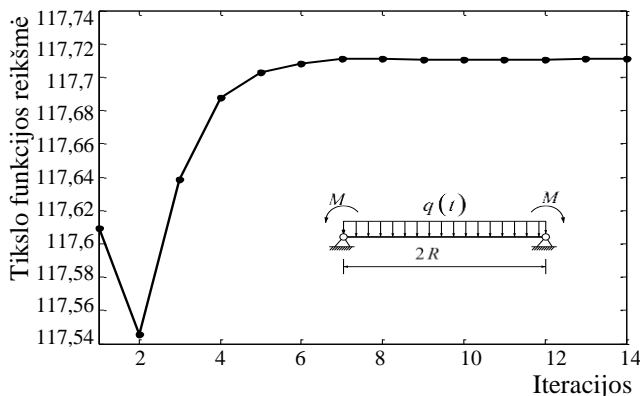
Fig. 4.3. Discrete model of circular plate ($s = 6$, $\nu = 3$)

Plokštės optimizavimo uždavinys (4.9)–(4.16) yra sprendžiamas iteracijomis, taikant MATLAB paprogramę *fmincon*, parinkus tokius tikslumo parametrus:

```
options=optimset('Algorithm','sqp','TolCon',1e-12,'TolFun',1e-12,'TolX',1e-12,'MaxFunEvals',1e6,'MaxIter',1e6).
```

Čia 'TolCon', 1e-12 – apribojimų tolerancija (skirtumas) tarp ankstesnės ir esamos iteracijų, 'TolFun', 1e-12 – tikslo funkcijos tolerancija, 'TolX', 1e-12 – kintamųjų (sprendinio) tolerancija, 'MaxFunEvals', 1e6, 'MaxIter', 1e6 – atitinkamai, maksimalus funkcijos perskaičiavimų iteracijose ir iteracijų skaičius.

Optimalus uždavinio (4.9)–(4.16) sprendinys gaunamas, kai tikslo funkcija (elementų skerspjūvių suma padauginta iš ribinių lenkimo momentų) konverguoja (4.4 pav.).



4.4 pav. Tikslo funkcijos konvergavimas

Fig. 4.4. Convergence of the objective function

Tikslo funkcijos reikšmė konverguoja prie $1,17711\text{E}+02 \text{ kNm}^2$ (čia ir toliau daugiklis $\text{E} \pm \text{XX}$ reiškia $\cdot 10^{\text{XX}}$). Visų šešių elementų optimalūs ribiniai lenkimo momentai pateikti 4.1 lentelėje.

4.1 lentelė. Optimalūs lenkimo momentai M_0^* ir elementų storiai

Table 4.1. Optimal limit bending moments M_0^* and elements thickness

Elemento numeris	Ribinis lenkimo momentas M_0 , kN	Elemento storis t , m
1	5,24097E+01	3,15956E-02
2	5,24138E+01	3,15968E-02
3	5,24437E+01	3,16058E-02
4	5,00425E+01	3,08738E-02
5	4,58080E+01	2,95387E-02
6	3,91662E+01	2,73134E-02

Kiti rezultatai yra: prisitaikiusios plokštės liekamieji poslinkiai u_r^* , liekamieji lenkimo momentai M_r^* (4.2 lentelė). Takumo sąlygų reikšmės φ_j , plastinių daugiklių vektoriai λ_j^* ($j \in J$) ir pastinės deformacijos θ_p^* pateiktos 4.2 lentelėje.

4.2 lentelė. Plokštės plastinių deformacijų priklausomybė nuo liekamųjų lenkimo momentų ir aktyvinių takumo sąlygų pasiskirtymas

Table 4.2. Plastic deformations dependence on residual bending moments and distribution of active yielding conditions

Liekamieji poslinkiai u_r^*	Liekamieji lenkimo momentai M_r^*	Takumo sąlygų reikšmės φ_j	Plastiniai daugikliai λ_j^*	Plastinės deformacijos θ_p^*
-3,44318E-03	2,84810E+00	-2,42639E+03	-1,15493E-30	-3,16232E-06
-3,44307E-03	2,84810E+00	-2,41982E+03	-8,80437E-30	-3,16232E-06
-3,44258E-03	2,80367E+00	-2,39974E+03	5,87406E-30	-1,46916E-04
-3,50113E-05	2,71509E+00	-2,40009E+03	-8,50256E-30	-1,48039E-04
-3,44318E-03	2,67096E+00	-2,36549E+03	1,47301E-29	-5,98096E-05
-3,01090E-03	2,31731E+00	-2,31450E+03	1,10834E-29	-6,16591E-05
-3,05865E-03	2,67096E+00	-2,31678E+03	-1,07711E-29	-2,65158E-03
3,56610E-03	2,31685E+00	-2,24725E+03	-8,47409E-30	-2,73482E-03
-2,85217E-03	2,45162E+00	-2,15612E+03	-3,26638E-31	2,81982E-28
-2,97737E-03	1,66678E+00	-1,98381E+03	7,21068E-31	3,05508E-28
-2,23991E-03	2,14771E+00	-1,88499E+03	-5,30016E-30	-1,11814E-03
3,97071E-03	7,62954E-01	-1,73959E+03	5,91646E-31	-1,26112E-03
-2,30494E-03	2,14771E+00	-1,46672E+03	8,38165E-31	3,05120E-28
-2,04804E-03	7,35566E-01	-1,33495E+03	1,79651E-30	3,38978E-28
-1,80025E-03	1,75711E+00	-1,13366E+03	5,73157E-31	-2,19385E-03
4,40123E-03	-3,83581E-01	-7,68705E+02	-1,71670E-29	-2,64856E-03
-1,61690E-03	1,29141E+00	-6,22073E+02	1,30963E-31	-7,80217E-05
-1,46017E-03	-1,72804E+00	-3,64044E+02	-9,47558E-32	-1,01954E-04
-1,01326E-03	1,29141E+00	-9,09495E-13	6,03384E-08	-1,89980E-03
4,54519E-03	5,13895E-01	-9,09495E-13	2,81394E-06	-1,91588E-03
-8,96181E-04	1,06742E+00	-4,54747E-13	1,15888E-06	1,45617E-28
-5,72056E-04	-1,16139E+00	4,54747E-13	5,13854E-05	1,33441E-28
-2,65336E-04	6,54606E-01	4,54747E-13	-1,10965E-29	-5,55288E-04
5,72372E-03	-3,40312E+00	-4,54747E-13	2,27106E-05	-7,84164E-04
	6,54606E-01	-1,36424E-12	-1,86721E-30	-1,87722E-03
	6,70332E-01	-9,09495E-13	4,62354E-05	-1,60262E-03
	5,32229E-01	-1,36424E-12	1,72094E-06	-5,40229E-29
	-1,68821E+00	0,00000E+00	3,81245E-05	-3,43820E-29
	1,61171E-01	-2,80082E+01	-1,54706E-31	-3,47638E-29
	-4,79282E+00	4,54747E-13	1,34481E-05	-4,06630E-29
	1,61171E-01	4,54747E-13	3,80223E-05	-6,43062E-03
	3,00654E+00	-4,37623E+01	-1,13121E-31	-3,45246E-03
	2,63146E-01	0,00000E+00	4,37795E-31	2,13014E-29
	-6,23288E-01	4,54747E-13	1,28064E-04	2,11186E-29
	8,96430E-30	-6,72170E+01	-6,54347E-31	-9,61377E-30
	-5,34843E+00	2,27374E-13	4,35436E-31	-1,78214E-29

4.3. Rozeno projektuojamųjų gradientų algoritmo optimalumo sąlygos

Plokštės optimizavimo uždavinio (4.9)–(4.16) sprendimo MATLAB sistema rezultatai (4.2 lentelė) patikrinami pagal Rozeno (Rosen's) projektuojamųjų gradientų metodo optimalumo kriterijus.

Lenkiamos plokštės analizės uždavinys matematinio programavimo terminais užrašomas taip:

$$\text{rasti} \quad \min \left\{ \mathcal{F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{L} \right\}, \quad (4.17)$$

kai kintamųjų \mathbf{x} leistinoji kitimo sritis yra:

$$\mathcal{L} = \{ \mathbf{x} \mid \boldsymbol{\varphi}_j(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad j \in J \}. \quad (4.18)$$

Atskirais atvejais tikslo arba apribojimų funkcijos gali būti tiesinės.

Algebrinės pusiausvyros lygtys $\mathbf{A} \mathbf{M}_r = \mathbf{0}$ iš tampriai plastinių konstrukcijų skaičiavimo eliminuojamos, pasitelkus Žordano metodiką (toks pertvarkymas yra statybinės mechanikos jėgų metodo pagrindinės sistemos parinkimas). Taip suformuojamas nepriklausomų kintamųjų vektorius \mathbf{x} ir sudaroma pertvarkymo matrica

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\left(\mathbf{A}^{(1)}\right)^{-1} & \mathbf{A}^{(2)} \\ & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Tuomet pertvarkytoji elementų pasidavimo matrica užrašoma taip:

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}. \quad (4.20)$$

Matricos \mathbf{D} ir \mathbf{B} pateiktos E priede.

Vektoriaus \mathbf{x} komponentais bendruoju atveju yra ne tik nepriklausomos statistiškai leistinos įrašos, bet ir optimizuojami konstrukcijos ar apkrovos parametrai. Leistinasis (tenkinantis apribojimus (4.18)) vektorius \mathbf{x}^{opt} , minimizuojantis tikslo funkciją (4.17), vadinamas optimaliu uždavinio (4.17)–(4.18) sprendiniu. Funkcijos $\boldsymbol{\varphi}_j(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$, $j \in J$ yra iškilišios, o matrica $\tilde{\mathbf{D}}$ griežtai teigiamai apibrėžta, todėl optimalus sprendinys \mathbf{x} užtikrina globalų tikslo funkcijos (4.17) minimumą leistinoje srityje \mathcal{L} (4.5 pav.).

Čia \mathbf{I} yra vienetinė matrica, $\nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}^{opt})$ – tikslo funkcijos (4.17) gradientas, $\nabla \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}^{opt})$ – aktyvinių apribojimų gradientų reikšmių taške \mathbf{x}^{opt} matrica. Sąlygų (4.22) analizė parodo, jog plastiniai daugikliai optimaliam sprendiniui yra:

$$\lambda = \left[\nabla \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}^{opt}) \nabla \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T(\mathbf{x}^{opt}) \right]^{-1} \nabla \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}^{opt}) \nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}^{opt}). \quad (4.23)$$

Formulėje (4.21) figūruoja taip vadinama projektyvinė matrica:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \left\{ \mathbf{I} - \nabla \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T(\mathbf{x}^{opt}) \left[\nabla \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}^{opt}) \nabla \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T(\mathbf{x}^{opt}) \right]^{-1} \nabla \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}^{opt}) \right\}. \quad (4.24)$$

Panaudojant matricą $\tilde{\mathbf{P}}$, randama tikslo funkcijos gradiento projekcija į aktyvinių apribojimų tiesinę įvairovę $\mathbf{H}_\kappa(\mathbf{x}^{opt})$ (į liečiamąją plokštumą, 4.5 pav.).

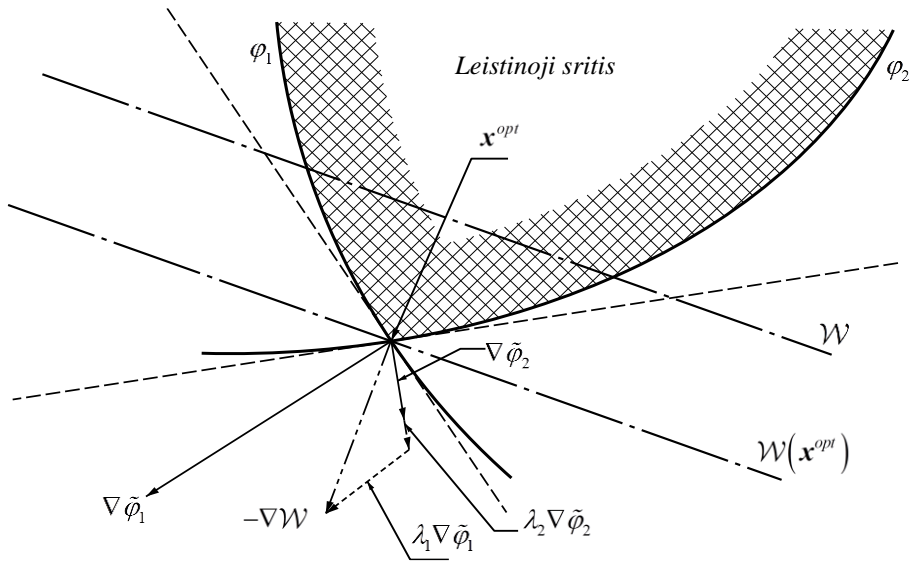
4.4. Baigiamoji skaitinių rezultatų kontrolė prisitaikiusiai plokštei

Prisitaikiusios plokštės skaitiniai rezultatai, gauti sprendžiant MATLAB sistema, patikrinami pagal optimalumo kriterijus (4.21) ir (4.22) (4.6 pav.) (Atkočiūnas 2012; Kalanta *et al.* 1972; Rosen 1961).

Pagal pradinius parametrus ir optimalius ribinius lenkimo momentus \mathbf{M}_0^* (4.1 lentelė), taikant Rozeno algoritmo valdymo programą (tai Statybinės mechanikos katedros darbuotojų sukurta programa) RUTA (Atkočiūnas *et al.* 1995; Venskų, Atkočiūnas 2005), takumo sąlygos suformuojamos atskirai, atmetamos tik aktyvinės takumo sąlygos $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Pagal formulę (4.24) sudaroma vadinamoji projektyvinė matrica $\tilde{\mathbf{P}}$. Tai užtikrina, kad analizės uždavinio tikslo funkcijos gradiento $\nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}^{opt})$ projekcija į $\mathbf{H}_\kappa(\mathbf{x}^{opt})$ yra artima arba lygi nuliui, o plastinių daugiklių (4.23) reikšmės yra teigiamos (4.3 lentelė).

Žinant optimalaus sprendinio vektorių \mathbf{x}^{opt} (4.3 lentelė) ir panaudojant matricą \mathbf{B} (4.20) (pateikta E priede), liekamųjų momentų vektorių \mathbf{M}_r^* galima rasti taip:

$$\mathbf{M}_r^* = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}^{opt}. \quad (4.25)$$



4.6 pav. Geometrinė Kuno-Takerio sąlygų interpretacija tiesinės tikslo funkcijos $\mathcal{W}(x^{opt})$ atveju (Tabak, Wright 1981)

Fig. 4.6. Geometric interpretation of Kuhn-Tucker conditions in case of linear objective function $\mathcal{W}(x^{opt})$ (Tabak, Wright 1981)

Nesunku įsitikinti, jog pagal formulę (4.25) gauti liekamieji momentai praktiškai sutampa su MATLAB sprendimo rezultatais. Sudarant projektyvinę matricą \tilde{P} taikoma gradientų matrica $\nabla \tilde{\phi}(x^{opt})$.

Pastaba. Svarbu atkreipti dėmesį į skaičiavimo MATLAB sistema tikslumą, kitaip rezultatai gauti taikant programą RUTA gali nesutapti su sistemos MATLAB rezultatais.

Pasitelkiant 4.3 lentelės duomenis, plastinės deformacijos gali būti apskaičiuojamos pagal formulę $\Theta_p = [\Theta_{pi}]^T$, čia $\Theta_{pi} = 2 \sum_j \lambda_{ij} \Pi_i M_{ij}$, $i \in I$, $j \in J$, jos sutampa su deformacijomis gautomis sprendžiant MATLAB (4.2 lentelė). Tada galima dar kartą perskaičiuoti liekamuosius poslinkius u_r^* ir liekamąsias įrašas M_r^* taikant formules (1.34), (1.35).

Rezultatai gauti taikant Rozeno projektuojamųjų gradientų algoritmą ir prisi laikant aukšto tikslumo skaičiuojant MATLAB sistema sutampa su MATLAB optimaliais rezultatais.

4.3 lentelė. Tikslo funkcijos gradientai $\nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}^{opt})$ ir plastiniai daugikliai λ^{opt} (4.23), vektorius \mathbf{x}^{opt} ir tikslo funkcijos gradiento projekcija $\tilde{\mathbf{P}}\nabla \mathcal{F}$

Table 4.3. Objective function gradient $\nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}^{opt})$ and plastic multipliers λ^{opt} (4.23), vector \mathbf{x}^{opt} and gradient projection $\tilde{\mathbf{P}}\nabla \mathcal{F}$ of objective function

Tikslo funkcijos gradientų reikšmės $\nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}^{opt})$	Absoliutinės plastinių daugiklių reikšmės λ^{opt}	Vektorius \mathbf{x}^{opt}	Gradiiento projekcija $\tilde{\mathbf{P}}\nabla \mathcal{F}$
-2,41975E-05	6,03218E-08	2,71509434946605	-1,87175152129999E-08
-1,80109E-05	2,81472E-06	2,31731202482350	-6,73722677324454E-08
-1,06327E-04	1,16109E-06	0,762953525930652	-2,21382903163973E-10
-1,10992E-03	5,13858E-05	-0,38358091483325	-9,11761065308133E-09
-3,94062E-04	2,27100E-05	-1,72804472561623	-8,21452585160385E-10
-2,22505E-03	4,62302E-05	-1,16139128418574	2,61249056236925E-08
-7,91752E-04	1,72038E-06	-3,40312423502999	-1,07573619319655E-09
-3,23355E-03	3,81232E-05	-1,68820740009356	5,78932734507945E-09
-1,44360E-03	1,34483E-05	-4,79282167289457	-2,37253303474790E-10
3,28989E+02	3,80173E-05	0,263145681321104	-0,0427143594977334
1,56648E+01	1,28064E-04	-0,62328788554527	0,00252976642941422
1,43577E+01	2,91736E-09	-5,34843251845788	0,00277437509011307

4.4. Ketvirtąjo skyriaus išvados

1. Rozeno projektuojamųjų gradientų metodo antroji optimalumo sąlyga (4.22) išreiškia aktyvinių takumo sąlygų (t. y. kai $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$) teigiamus plastinius daugiklius.
2. Kuno-Takerio sąlygos yra konstrukcijų analizės uždavinio geometrinės lygtys. Jeigu pusiausvyros sąlygos yra eliminuojamos iš statinės analizės uždavinio formuluotės, tada deformacijų darnos lygtys išreiškiamos Kuno-Takerio sąlygomis.
3. Geometrinių lygčių grafinė interpretacija atskleidžia, jog tikslo funkcijos gradientas yra aktyvinių apribojimų gradientų kūgyje.
4. Nustatyta, kad pasiūlytoji metodika leidžia fiziškai ir skaitiškai patikrinti ir įvertinti optimizavimo uždavinio sprendimo MATLAB (ar kita) sistema rezultatus.

Bendrosios išvados

1. Apkrovimo istorijos neapibrėžtumas neleidžia vienareikšmiškai nustatyti plastinės konstrukcijos įtempių ir deformacijų būvio: įrašų, deformacijų, poslinkių. Tokiu atveju, konstrukcijų mechanikos uždavinį reikia spręsti nustatant minėtų kintamųjų kitimo ribas.
2. Atsižvelgiant į prisitaikomumo tyrimų analizę ir skaitinių eksperimentų rezultatus nustatyta, kad konstrukcijų, kurių skerspjuviai prisitaikomumo proceso metu patiria nusikrovimą, liekamiesiems poslinkiams nustatyti pilnutinės potencinės energijos minimumo principas negali būti taikomas tiesiogiai.
3. Atliekant skenavimo metodo skaitinį eksperimentą nustatyta, kad skerspjuvių nusikrovimo faktą galima užfiksuoti tik pasirinkus tinkamą skenavimo strategiją. Liekamųjų poslinkių kitimo ribų nustatymo patikimumas gali būti padidintas didinant skenavimo strategijų skaičių.
4. Analizuojant skenavimo rezultatus, įrodyta, kad liekamųjų įrašų S_r^* pasiskirstymas galutiniam skenavimo etape atitinka Melano teoremą ir yra vienintelis. Tuo tarpu liekamieji poslinkiai u_r^* ir plastinės deformacijos θ_p^* nebūtinai yra vieninteliai (gali priklausyti nuo apkrovimo istorijos – Melano teoremos interpretacija).

5. Skenavimo metodas apkrovų kitimo srities viduje leidžia išskirti poaibių, išreiškiančių vieną ar kitą prisitaikomumo reiškinių charakterį (pavyzdžiui, nenusikraunančių skerspjūvių egzistavimas visą prisitaikomumo procesą) ribas.
6. Skaitinių eksperimentų dalyje įrodyta, jog optimizavimo uždavinių matematinių modelių tinkamumo sąlygose būtina taikyti skenavimo metodika gautas liekamųjų poslinkių reikšmes. Nagrinėtos plieninės rėminės konstrukcijos atveju tūris sumažėjo 8,05 %.
7. Įrodyta, jog bendrąjį optimizavimo pritaikomumo sąlygomis matematinį modelį papildytą takumo sąlygomis, išvestomis pagal gelžbetoninio skerspjūvio stiprumo srities kritinius taškus, galima taikyti gelžbetoninių skerspjūvių optimaliam armatūros parinkimui (atsižvelgiant į Eurokodo 2 reikalavimus armatūros parinkimui ekscentriškai gniuždomiems dvigubai armuotiems stačiakampiems skerspjūviams). Įrodyta, kad kai apkrovos kitimo amplitudinės reikšmės yra kintančios krypties, armavimo pobūdis stačiakampiame skerspjūvyje yra simetrinis.
8. Skirtingoms konstrukcijoms nebūtina kurti individualaus specifinio algoritmo sukaupų plastinių deformacijų nustatymui, kai jų radimas ir klasikinis prisitaikomumo teorijos uždavinys apjungiami į vieningą sistemą.
9. Disertacijoje sukurta fizikinės kontrolės metodika, kurią taikant galima skaitiškai patikrinti konstrukcijų optimizavimo prisitaikomumo sąlygomis uždavinio sprendinį (kuris iki patikrinimo laikomas „juodąja dėže“). Pagal šią metodiką tikrinama ar sprendinys atitinka Melano teoremą (statika) ir liekamųjų deformacijų darnos lygtis (kinematika). Optimizavimo uždavinio sprendinio konkrečių dalių kontrolė atliekama pasitelkus Rozeno projektuojamųjų gradientų metodą.

Literatūra ir šaltiniai

Alawdin, P. 1979. Igrovyye zadachi optimizatsii nelineynykh konstruksiy pri povtorno-peremennom nagruzhenii. In *Teoriya i metody avtomatizatsii proyektirovaniya: nauchno-tekhn. sb. / In-t tekhnich. kibernetiki AN BSSR*, 58–67.

Alawdin, P. 1987. Prispoblyayemost' elementov konstruksii v obshchem sluchaye nagruzheniya. In *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika: mezhdunarodnyy nauchno-tekhnicheskii sbornik*, 95–100. Minsk: Vysheyshaya shkola.

Alawdin, P. 1994. A new class of effective carrying structures: Analysis and synthesis. *Architecture and Civil Engineering of Belarus*, 5(6): 6–10. (in Russian).

Alawdin, P. 1997. Prispoblyayemost' effektivnykh zhelezobetonnykh konstruksiy k dinamicheskim vozdeystviyam. In *Materialov mezhd. konferentsii Inzhenernyye problemy sovremennogo betona i zhelezobetona*, 11–27. Minsk.

Alawdin, P. 2002. Analiz prochnosti zhelezobetonnykh konstruksiy pri povtorno-peremennykh vozdeystviyakh. In *Tr. Mezhdunar. nauchno-tekhnich. konf. Prostranstvennyye konstruktivnyye sistemy zdaniy i sooruzheniy*, 26–39. Minsk: Strinko.

Alawdin, P. 2005. *Limit analysis of structures under variable loads*. Minsk: Tekhnoprint. Retrieved from <http://isbnpplus.org/9789854647272>

Alawdin, P.; Kasabutski, S. 2009. Limit and shakedown analysis of RC rod cross-sections. *Journal of Civil Engineering and Management*, 15(1): 59–66. DOI:10.3846/1392-3730.2009.15.59-66

Alawdin, P.; Urbańska, K. 2013. Limit Analysis of Geometrically Hardening Rod Systems using Bilevel Programming. *Procedia Engineering*, 57: 89–98. DOI:10.1016/j.proeng.2013.04.014

Atkočiūnas, J. 1999. Mathematical models of optimization problems at shakedown. *Mechanics Research Communications*, 26(3): 319–326. DOI:10.1016/S0093-6413(99)00030-0

Atkočiūnas, J. 2012. *Optimal Shakedown Design of Elastic-Plastic Structures*. Vilnius, Lithuania: Vilnius Gediminas Technical University. DOI:10.3846/1240-S

Atkočiūnas, J.; Jarmolajeva, E.; Merkevičiūtė, D. 2004. Optimal shakedown loading for circular plates. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 27(3): 178–188. DOI:10.1007/s00158-003-0308-5

Atkočiūnas, J.; Karkauskas, R. 2010. *Optimization of Elastic Plastic Beam Structures*. Vilnius, Lithuania: Vilnius Gediminas Technical University. DOI:10.3846/1137-S

Atkočiūnas, J.; Nagevičius, J.; Žukas, N. 1995. Matematinio programavimo metodai tamprųjų-plastinių plokščių analizės uždaviniuose. In *Modern building materials, structures and techniques : proceedings of 4th international conference, held on May 10-13*, 249–254. Vilnius.

Atkočiūnas, J.; Norkus, A. 1994. Method of fictitious system for evaluation of frame shakedown displacements. *Computers & Structures*, 50(4): 563–567. DOI:10.1016/0045-7949(94)90027-2

Atkočiūnas, J.; Ulitinas, T.; Kalanta, S.; Blaževičius, G. 2015. An extended shakedown theory on an elastic–plastic spherical shell. *Engineering Structures*, 101: 352–363. DOI:10.1016/j.engstruct.2015.07.021

Barauskas, R.; Kačianauskas, R.; Belevičius, R. 2004. *Baigtinių elementų metodo pagrindai*. Vilnius: Technika.

Bazaraa, M. S.; Sherali, H. D.; Shetty, C. M. 2006. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc. DOI:10.1002/0471787779

Beardmore, R. 2011. Reinforced concrete background theory, Roymech. Retrieved April 10, 2015, from http://www.roymech.co.uk/Related/Construction/Concrete_beams.html

Belytschko, T.; Liu, W. K.; Moran, B.; Elkhodary, K. 2013. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures* (II edition). Retrieved from <http://eu.wiley.com/WileyCDA/WileyTitle/productCd-1118632702.html>

Blaževičius, G.; Rimkus, L.; Atkočiūnas, J. 2014. An improved method for optimal shakedown design of circular plates. *Mechanics*, 20(4): 390–394. DOI:10.5755/j01.mech.20.4.6542

Capurso, M. 1974. A displacement bounding principle in shakedown of structures subjected to cyclic loads. *International Journal of Solids and Structures*, 10(1): 77–92. DOI:10.1016/0020-7683(74)90102-4

Capurso, M.; Corradi, L.; Maier, G. 1979. Bounds on deformations and displacements in shakedown theory. In *Materiaux et structures sous chargement cyclique*, Ass. amicale des ingenieurs anciens eleves de l'E.N.P.C. 231–244. Paris.

Casciaro, R.; Garcea, G. 2002. An iterative method for shakedown analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(49–50): 5761–5792. DOI:10.1016/S0045-7825(02)00496-6

Corigliano, A.; Maier, G.; Pycko, S. 1995. Dynamic shakedown analysis and bounds for elastoplastic structures with nonassociative, internal variable constitutive laws. *International Journal of Solids and Structures*, 32(21): 3145–3166. DOI:10.1016/0020-7683(94)00265-X

Corradi, L.; Maier, G. 1974. Dynamic non-shakedown theorem for elastic perfectly-plastic continua. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 22(5): 401–413. DOI:10.1016/0022-5096(74)90005-2

Corradi, L.; Zavelani, A. 1974. A linear programming approach to shakedown analysis of structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3: 37–53.

Čyras, A. 1969. *Metody lineynogo programmirovaniya pri raschete uprugoplasticheskikh sistem* (in Russian). Leningrad: Stroyizdat.

Čyras, A.; Atkočiūnas, J. 1970. The analysis of perfectly elastic-plastic body under cyclic load. *Lith. Proc. in Mech.*, 2(7): 31–43.

Czarnecki, W.; Staszczuk, P. 1997. *Design of Reinforced Concrete Columns*. Zielona Gora: Politechnika Zielonogórska.

DoITPoMS, U. of C. 2004. Derivation of the Rule of Mixtures and Inverse rule of Mixtures. Retrieved April 11, 2015, from http://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/bones/derivation_mixture_rules.php

Dorosz, S.; König, J. A.; Biegus, A.; Kowal, Z.; Seidel, W. 1981. Deflections of elastic-plastic hyperstatic beams under cyclic loading. *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, 33(5): 611–624.

Gallagher, R. H. 1975. *Finite element analysis: Fundamentals*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall. Retrieved from <http://doi.wiley.com/10.1002/nme.1620090322>

Giambanco, G.; Fuschi, P.; Rizzo, S. 1994. Shakedown optimum design of reinforced concrete framed structures. *Engineering Optimization*, 23(2): 141–154. DOI:10.1080/03052159408941350

Gokhfeld, D. A. 1966. Some problems of plastic shakedown of plates and shells (in Russian). In *Proceedings of the 6th Soviet conference on Plates and Shells*, 284–291. Bakou: Moscow Izd. Nauka.

Gokhfeld, D. A.; Cherniavsky, O. F. 1980. *Limit analysis of structures at thermal cycling*. Alphen aan den Rijn, Netherlands; Rockville, Md.: Sijthoff & Noordhoff.

Hodge, P. G. 1954. *Shake-down of elastic-plastic structures*. New York: Reinhold.

- Hodge, P. G.; Kalinowski, A. J. 1970. Shakedown interaction curve for a circular arch. *Developments in Theoretical and Applied Mechanics*, 529–540.
- Jankovski, V.; Atkočiūnas, J. 2010. Saosys toolbox as Matlab implementation in the elastic-plastic analysis and optimal design of steel frame structures. *Journal of Civil Engineering and Management*, 16(1): 103–121. DOI:10.3846/jcem.2010.10
- Juozaipaitis, A.; Norkus, A. 2004. Displacement analysis of asymmetrically loaded cable. *Journal of Civil Engineering and Management*, 10(4): 277–284. DOI:10.1080/13923730.2004.9636320
- Kaklauskas, G.; Gribniak, V.; Jakubovskis, R.; Gudonis, E.; Salys, D.; Kupliauskas, R. 2012. Serviceability Analysis of Flexural Reinforced Concrete Members. *Journal of Civil Engineering and Management*, 18(1): 24–29. DOI:10.3846/13923730.2011.643553
- Kala, Z. 2012. Geometrically Non-linear Finite Element Reliability Analysis of Steel Plane Frames With Initial Imperfections. *Journal of Civil Engineering and Management*, 18(1): 81–90. DOI:10.3846/13923730.2012.655306
- Kalanta, S. 1995. The equilibrium finite elements in computation of elastic structures. *Statyba*, 1(1): 25–47. DOI:10.1080/13921525.1995.10531500
- Kalanta, S.; Atkočiūnas, J.; Mažuolis, B.; Čyras, A. 1972. Non-linear problems of the rigid-plastic thin rectangular plates analysis. *Lith. Proc. in Mech.*, 11: 61–74. (in Russian).
- Karkauskas, R. 2007. Optimisation of geometrically non-linear elastic-plastic structures in the state prior to plastic collapse. *Journal of Civil Engineering and Management*, 13(3): 37–41. DOI:10.1080/13923730.2007.9636436
- Koiter, W. T. 1960. General Theorems for Elastic-plastic Solids. In I. N. Sneddon & R. Hill (Eds.), *Progress in Solid Mechanics*, 165–221. Amsterdam: North-Holland.
- König, J. A. 1982. On some recent developments in the shakedown theory. *Advances in Mechanics*, 5(1): 237–258.
- König, J. A. 1987. *Shakedown of Elastic-Plastic Structures. Fundamental Studies in Engineering* (Vol. 7). Amsterdam: Elsevier. DOI:10.1016/B978-0-444-98979-6.50018-9
- König, J. A.; Kleiber, M. 1978. On a new method of shakedown analysis. *Bulletin de L'academie Polonaise Des Sciences. Serie Des Sciences Techniques*, 26(4): 167–171.
- König, J. A.; Siemaszko, A. 1988. Strainhardening effects in shakedown processes. *Ingenieur-Archiv*, 58(1): 58–66. DOI:10.1007/BF00537200
- Korentz, J. 2014. Metody analizy pracy przekroju żelbetowego mimośrodowo ściskanego w stanie deformacji pokrywcznych. *Budownictwo I Architektura*, 13(3), 119–126.
- Liepa, L. 2012. *Geometrically Nonlinear Analysis of Elastic-Plastic Frame*. Faculty of Civil Engineering, Vilnius Gediminas Technical University. Magistrinis darbas: http://vddb.laba.lt/obj/LT-eLABa-0001:E.02~2012~D_20120723_105737-68422
- LST EN 10080:2006. 2006. Armatūrinis plienas. Suvirinamasis armatūrinis plienas. Bendrieji dalykai. *Lietuvos Standartizacijos Departamentas*.

- LST EN 1992-1-1:2005. 2007. Eurokodas 2. Gelžbetoninių konstrukcijų projektavimas. 1-1 dalis. Bendrosios ir pastatų taisyklės. *Lietuvos Standartizacijos Departamentas*, 234.
- LST EN 1993-1-1:2005+AC:2006. 2010. Eurokodas 3. Plieninių konstrukcijų projektavimas. 1-1 dalis. Bendrosios ir pastatų taisyklės. *Lietuvos Standartizacijos Departamentas*.
- LST STR 2.05.08:2005. (n.d.). Plieninių konstrukcijų projektavimas. Pagrindinės nuostatos. Vilnius.
- Maier, G. 1969. Shakedown theory in perfect elastoplasticity with associated and nonassociated flow-laws: A finite element, linear programming approach. *Meccanica*, 4(3): 250–260. DOI:10.1007/BF02133439
- Melan, E. 1936. Theorie statisch unbestimmter Systeme aus ideal plastischem Baustoff. *Sitz. Ber. Akad. Wiss. Wien.*, II.a(145): 195–218.
- Moskvitin, V. V. 1960. On shakedown of elastic plastic systems. *Izv. Akad. Nauk SSR, OTN*, 5: 101–107.
- Moskvitin, V. V. 1965. *Plasticity under Variable Loadings*. Maskva: Izd. Mosk. Univ.
- Narvydas, E. 2011. *Kompiuterinė konstrukcijų analizė: principai ir tipiniai pavyzdžiai*. KTU leidykla “Technologija.” DOI:10.5755/e01.9786090206232
- Polizzotto, C. 1979. Upper bounds on plastic strains for elastic-perfectly plastic solids subjected to variable loads. *International Journal of Mechanical Sciences*, 21(6): 317–327. DOI:10.1016/0020-7403(79)90013-4
- Polizzotto, C.; Rizzo, S. 1987. Optimum design of reinforced concrete structures under variable loadings. *Engineering Optimization*, 11(3–4): 327–338. DOI:10.1080/03052158708941055
- Ponter, A. R. S. 1972. An Upper Bound on the Small Displacements of Elastic, Perfectly Plastic Structures. *Journal of Applied Mechanics*, 39(4): 959. DOI:10.1115/1.3422898
- Ponter, A. R. S. 1975. *A general shakedown theorem for elastic/plastic bodies with work hardening*, SMiRT 3, London, UK.
- Rosen, J. B. 1960. The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming. Part I. Linear Constraints. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 8(1), 181–217. DOI:10.1137/0108011
- Rosen, J. B. 1961. The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming. Part II. Nonlinear Constraints. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 9(4): 514–532. DOI:10.1137/0109044
- Rozenblum, V. I. 1958. On the shakedown theory of elastic-plastic bodies. *Izv. Akad. Nauk SSR, OTN, Mekh. Mash.*, 6: 47–53.
- Saka, M. P.; Kameshki, E. S. 1998. Optimum design of unbraced rigid frames. *Computers & Structures*, 69(4): 433–442. DOI:10.1016/S0045-7949(98)00117-5

- Sawczuk, A. 1969. Evaluation of upper bounds to shakedown loads for shells. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17(4): 291–301. DOI:10.1016/0022-5096(69)90018
- Sawczuk, A. 1974. Shakedown analysis of elastic-plastic structures. *Nuclear Engineering and Design*, 28(1): 121–136. DOI:10.1016/0029-5493(74)90091-0
- Simon, J.-W.; Chen, M.; Weichert, D. 2012. Shakedown Analysis Combined With the Problem of Heat Conduction. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 134(2): 21206. DOI:10.1115/1.4004868
- Simon, J.-W.; Kreimeier, M.; Weichert, D. 2013. A selective strategy for shakedown analysis of engineering structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 94(11): 985–1014. DOI:10.1002/nme.4476
- Stein, E.; Zhang, G.; König, J. A. 1992. Shakedown with nonlinear strain-hardening including structural computation using finite element method. *International Journal of Plasticity*, 8(1): 1–31. DOI:10.1016/0749-6419(92)90036-C
- Stein, E.; Zhang, G.; Mahnen, R. 1993. Shakedown analysis for perfectly plastic and kinematic hardening materials. In *CISM. Progress in Computational Analysis or Inelastic Structure*, 175–244. Vienna: Springer Vienna. DOI:10.1007/978-3-7091-2626-4_4
- Tabak, E. I.; Wright, P. M. 1981. Optimality Criteria Method for Building Frames. *Journal of the Structural Division*, 107(7): 1327–1342.
- Tritsch, J.-B.; Weichert, D. 1995. Case Studies on the Influence of Geometric Effects on the Shakedown of Structures, 309–320. DOI:10.1007/978-94-011-0271-1_17
- Venskus, A.; Atkočiūnas, J. 2005. Plokštės analizės netiesinio uždavinio sprendimo programa „Ruta“ ir jos integracijos galimybės. In *8-osios Lietuvos jaunųjų mokslininkų konferencijos „Lietuva be mokslo – Lietuva be ateities“*, 277–282. Vilnius: Technika.
- Weichert, D. 1986. On the influence of geometrical nonlinearities on the shakedown of elastic-plastic structures. *International Journal of Plasticity*, 2(2): 135–148. DOI:10.1016/0749-6419(86)90009-4
- Weichert, D.; Hachemi, A. 1998. Influence of geometrical nonlinearities on the shakedown of damaged structures. *International Journal of Plasticity*, 14(9): 891–907. DOI:10.1016/S0749-6419(98)00035-7
- Weichert, D.; Hachemi, A. 2006. A shakedown approach to the problem of damage of fiberreinforced composites. In *IUTAM Symposium on Multiscale Modelling of Damage and Fracture Processes in Composite Materials*, 41–48. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. DOI:10.1007/1-4020-4566-2_5
- Weichert, D.; Hachemi, A. 2009. Recent Advances in Lower Bound Shakedown Analysis. In *Volume 2: Computer Applications/Technology and Bolted Joints*, 283–287. ASME. DOI:10.1115/PVP2009-77286
- Zavelani, R. A. 1971. Optimal shakedown design of reinforced concrete beams. *Rendiconti Ist. Lombardo, Acc. Scienze E Lettere*, 105: 147–164.

Autoriaus mokslinių publikacijų disertacijos tema sąrašas

Straipsniai recenzuojamuose mokslo žurnaluose

Liepa, L.; Blaževičius, G.; Merkevičiūtė, D.; Atkočiūnas, J. 2016. Structural shakedown: a new methodology for estimating the residual displacements, *Journal of Civil Engineering and Management* 22(8): 1055–1065. doi:10.3846/13923730.2016.1217924 (ISI Web of Science, IF₂₀₁₅=1,530)

Alawdin, P.; Atkociunas, J.; Liepa, L. 2016. Optimization of the Structures at Shakedown and Rosen's Optimality Criterion, *Civil and Environmental Engineering Reports* 22(3): 5–24. doi:10.1515/ceer-2016-0031

Liepa, L.; Gervytė, A.; Jarmolajeva, E.; Atkočiūnas, J. 2014. Daugiaatramės sijos liekamųjų poslinkių progresinė analizė, *Mokslas – Lietuvos ateitis* 6(5): 461–467. doi:10.3846/mla.2014.686

Liepa, L.; Karkauskas, R. 2012. Tampriųjų ir plastinių geometriškai netiesinių rėmų skaičiavimas, *Mokslas – Lietuvos ateitis* 4(4): 326–334. doi:10.3846/mla.2012.51

Straipsniai kituose leidiniuose

Alawdin, P.; Liepa, L. 2016. Shakedown optimization of the Thin-Wall Metal structures under strength and stiffness constraints, in: *Metal Structures 2016 : Proceedings of the XIII International Conference on Metal Structures (ICMS2016, Zielona Góra, Poland, 15–17 June 2016)* Chapter 45. pp. 393–400 doi:10.1201/b21417-54 (ISI Proceedings)

Blaževičius, G.; Atkočiūnas, J.; Liepa, L.; Rimkus, L.; Merkevičiūtė, D. 2016. Solution validation technique for optimal shakedown design problems, in: *Mechanika'2016 : Proceedings of the 21th International Scientific Conference*, 12–13, May, 2016, Kaunas University of Technology, Lithuania. Kaunas: Kauno technologijos universitetas. pp. 42–46. (ISI Proceedings)

Liepa, L.; Gervytė, A. 2015. Residual Displacement Analysis of Structures at Shakedown, in: *Proceedings of the Fifteenth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing*. pp. 1–16 doi:10.4203/ccp.108.250

Liepa, L.; Gervytė, A.; Atkočiūnas, J. 2014. Kokybinė liekamųjų poslinkių kitimo analizė, esant kartotinei kintamai konstrukcijų apkrovai, in: *Proceedings of the 17th Conference for Junior Researchers "Science – Future of Lithuania."* Vilnius, pp. 1–10.

Liepa, L.; Karkauskas, R. 2012. Tampraus plastinio rėmo geometriškai netiesinė analizė, *Proceeding of the 15th Conference for Junior Researchers "Science – Future of Lithuania."*, Vilnius, pp. 1–9.

Summary in English

Introduction

Problem formulation

The first works in the theory of shakedown, dedicated to behavior analysis and design of the structures subjected to variable repeated loads (VRL), were associated with plastic cyclic collapse (limit state of equilibrium) (Čyras 1969; Maier 1969). Analysis of the structures at shakedown to VRL is usually based on classical Malan (Melan 1936) and Koiter (Koiter 1960) theorems, which allows to analyze simple structures (the main drawback of these theorems is impossibility to determine the possible plastic deformations, if only variation bounds of VRL are given). If such initial information about loads is given, the problem of structural mechanics (determination of displacements and internal forces) is indefinite, because in the theory of plasticity the known loading history is mandatory. It is possible to determine only variation bounds of residual displacements and deformations. In this dissertation by linking formulation of Melan theorem with duality theorem of convex mathematical programming, a new methodology for determining variation bounds of residual displacements is created: “scanning method for displacements”. This is new, having no analogue in scientific literature, computational tool for displacements analysis. Creation of this control method and examination of its suitability for optimization problems of structures at shakedown, is the main research task of this thesis.

Relevance of the thesis

Optimization of the structures at shakedown state, allows to prepare the most economical projects of such structures and partly lower the costs of construction (if the quality of optimization problems solutions is thoroughly controlled!). In the scientific literature Koiter (Koiter 1960) was the first who analyzed plastic deformations (herewith residual displacements) at the state of shakedown. In his book one can find, that work of the structures at shakedown is finite. The integral formula suggested by Koiter due to its inaccuracy is not applicable in the field of structural optimization at shakedown. Up to date in scientific literature there are no new suggestions for analysis of residual displacements. Therefore relevance of the thesis is based on the actuality of structural engineering: to create a new tool for determination of residual displacements variation bounds, based on a computational calculation of the structures and mathematical programming methods. Creation of such tool reveals new perspectives in the fields of analysis and optimization of building structures which experiences plastic deformations.

Research object

Research object – analysis and optimization of framed structures at shakedown taking into account strength and stiffness bounding conditions.

Aim of the thesis

The main aim of the thesis – to create a new scanning method for analysis of displacements and deformations of the structures at shakedown and to implement it to the mathematical models of optimization problems.

Objectives of the thesis

In order to achieve the aim of the thesis, the following objectives have been set:

1. To analyze relations of the Melan's theorem with mathematical programming theorem.
2. To create a mathematical model of residual displacement scanning problem and perform its numerical testing.
3. To reveal the possibilities of shakedown theorem application for analyzing work of steel and reinforced concrete structures.
4. To check and evaluate quality of computational results of structures at shakedown optimization problems.

Research methodology

Performed researches are based on the integration of plasticity theorem with theorem of mathematical programming and computational methods. Assumptions of small deformations and quasi static loads are applied. In this dissertation theoretical and numerical experiments parts are distinguished.

Scientific novelty of research findings

For the first time, a significant progress has been made for variation bounds determination of residual displacements (a scanning method created), when information about loading history is limited to its variation bounds. Application of the scanning method allows to fine down the optimization results of structures at shakedown.

Practical value of research findings

The theoretical principles of systems at shakedown, discretization together with mathematical models of optimization problems in this dissertation forms logically united scientific problem. The created mathematical models of structures at shakedown optimization problems and their solving algorithms are sufficiently universal. This encourages and accelerates the integration of building structures optimization results in to the design practice. The ideas of residual displacements variation bounds determination, presented in this thesis, may be implemented in to the commercial structural design systems, which are used within building information modeling (BIM) scheme. This would allow to assess and accumulate the information about compliance to the requirements of limit states of serviceability and safety throughout live cycle of the structure.

Defended statements

1. Outcomes of Melan theorem may be successfully applied for the analysis of the deformed state of structures which may or not experience the unloading of the sections.
2. Scanning procedure is based on the principle of complementary deformation energy minimum, when loads variation locus is expanded.
3. Scanning method within load variation locus allows to distinguish limits of subsets, which defines one or another character of shakedown (i. e. the existence of nonunloading cross-sections during whole process of shakedown).
4. Determination of an accumulated plastic deformations and classical problem of shakedown theorem might be joined into united system of methods, which for different types of structures does not require creation of an individual specific algorithm.
5. Revised mathematical model of optimization problem can applied to modern design practice of steel and reinforced concrete framed structures at shakedown.

Approval of research findings

9 articles have been published concerning thesis topics: 1 publication in journal indexed in ISI Web of Science (Liepa *et al.* 2016), 3 – in the journals quoted in other international databases (Alawdin *et al.* 2016; Liepa *et al.* 2014; Liepa, Karkauskas 2012); 2 – in the international conferences proceedings indexed in ISI Proceedings (Alawdin, Liepa 2016; Blaževičius *et al.* 2016); 1 – in other international conference proceedings (Liepa, Gervytė

2015); 2 – in national conferences proceedings (Liepa *et al.* 2014; Liepa, Karkauskas 2012).

Research result were approved in 5 scientific conferences:

- International conference “Mechanika–2016”, 2016. Kaunas, Lithuania;
- International conference “*XIII International Conference on Metal Structures*”, 2016. Zielona Gora, Poland;
- International conference “*Fifteenth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing*”, 2015. Prague, Czech Republic;
- National junior research conference “*Science – Future of Lithuania*”, 2012 and 2014. Vilnius, Lithuania.

Structure of the thesis

The thesis consists of the introduction, four chapters and general conclusions. Additionally, there are seven annexes included in the CD. The entire work takes 109 pages without annexes, 34 figures, and 14 data tables and 175 numerical equations. It cites 82 scientific articles.

1. Analysis of framed structures shakedown researches

Analytical overview in historical context of the theorems for shakedown (Melan 1936) and nonshakedown (Koiter 1960) of the structures subjected to variable repeated loads (VRL) is presented. Duality of these theorems is discussed. The main principles of the steel (material model is considered ideally elastic-plastic) bar structures discretization by equilibrium finite elements are provided in the 1st chapter. The mathematical model of analysis problem for determination of true stress strain state (SSS) variables of the structure prior its plastic collapse is examined in detail. By the means of Khun-Tucker conditions the influence matrices for determination of residual variables are formed. Issues of residual displacements bounds determination, due to possible unloading, in mathematical models of optimization problems are discussed. The ability to determine bounds of displacements allowed to improve the general mathematical model of optimization problem of structures at shakedown.

An overview of recent researches led to the following points in evolution of shakedown theory:

1. Derivation of separate criterions, which generalizes incremental collapse and variable plasticity (Gokhfeld 1966; Koiter 1960; Sawczuk 1969).
2. Creation of procedures, which allows to limit maximal deformations before shakedown happens (Capurso 1974; Casciaro, Garcea 2002; König 1987).
3. Extension of shakedown analysis for hardening structures (Alawdin 2005; Alawdin, Urbańska 2013; König, Siemaszko 1988; Stein *et al.* 1993, 1992).
4. Shakedown analysis taking into account geometric nonlinearities (Tritsch, Weichert 1995; Weichert 1986; Weichert, Hachemi 1998).

Discretization of the structures, which geometry, material and sectional parameters are known, in this thesis is based on a method of equilibrium finite elements (Belytschko *et al.* 2013; Gallagher 1975; Kalanta 1995).

To determine the true stress strain state (SSS) in prior collapse state, the extremum energy principle of the minimum complementary deformation energy is considered, which states:

of all statically admissible vectors \mathbf{S}_r of residual forces, the actual one corresponds to the minimum of complementary deformation energy of the structure at shakedown.

In case of nonlinear yielding conditions, the following extreme problem corresponds to this principle:

$$\text{find} \quad \min \quad \left(\mathcal{F}'(\mathbf{S}_r) = \frac{1}{2} \mathbf{S}_r^T \mathbf{D} \mathbf{S}_r \right) = a^*, \quad (\text{S1.1})$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{C} - f_j(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_{ej}) \geq \mathbf{0} \quad \text{for all } j \in J, \quad (\text{S1.2})$$

$$\mathbf{A} \mathbf{S}_r = \mathbf{0}. \quad (\text{S1.3})$$

Here $\mathcal{F}'(\mathbf{S}_r)$ – function, which expresses a complementary deformation energy via residual forces \mathbf{S}_r . Problem (S1.1)–(S1.3) is convex mathematical programming problem, therefore optimal solution is unique, it is a vector of residual forces \mathbf{S}_r^* .

Graphical representation of the analysis problem (S1.1)–(S1.3) is illustrated in Fig. S1. In this figure the optimal solution \mathbf{S}_r^* of the problem (S1.1)–(S1.3) is shown, when at least one yielding condition is satisfied as an equality $\varphi_1 = \mathbf{C} - f_1(\mathbf{S}_r^* + \mathbf{S}_{e1}) = 0$.

Kinematic formulation of the analysis problem can be derived, when sign of the objective function (S1.1) is changed into opposite, then the problem is related to the minimum principle of the total potential energy:

of all kinematically admissible vectors of residual displacements \mathbf{u}_r , the actual one corresponds to the minimum of the total potential energy of the structure at shakedown.

Residual displacements and residual forces influence matrices can be written as follows:

$$\mathbf{S}_r = \left\{ \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} - \mathbf{D}^{-1} \right\} \boldsymbol{\theta}_p = \bar{\mathbf{G}} \boldsymbol{\theta}_p, \quad (\text{S1.4})$$

$$\mathbf{u}_r = (\mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\theta}_p = \bar{\mathbf{H}} \boldsymbol{\theta}_p. \quad (\text{S1.5})$$

Here $\bar{\mathbf{G}}$ and $\bar{\mathbf{H}}$ – influence matrices of residual forces and residual displacements respectively.

Computational realization of analysis problem are illustrated by analyzing the frame structure of known geometry (Fig. S2.2).

$$S_{ej} = \alpha(S_0) F_j, \quad u_{ej} = \beta(S_0) F_j \quad \text{for all } j \in J. \quad (S1.16)$$

Unknowns of the problem are S_0 , S_r , u_r ir λ_j . Due to nonmonotonous variation of residual displacements, improved displacements bounding conditions are written (S1.14)–(S1.15).

2. Melan theorem interpretation: scanning method for residual displacements

Analysis of residual displacements scanning method, based on an interpretation of Melan theorem, is presented. Mathematical models of scanning problems are based on extremum energy principles of mechanics and on a theory of mathematical programming. During scanning procedure the load variation locus is progressively expanded (Fig. S2.1). By using, in this thesis, presented scanning procedure it is possible to determine the upper and lower variation bounds of residual displacements.

An idea of load variation locus scanning procedure is illustrated in Fig. S2.1.

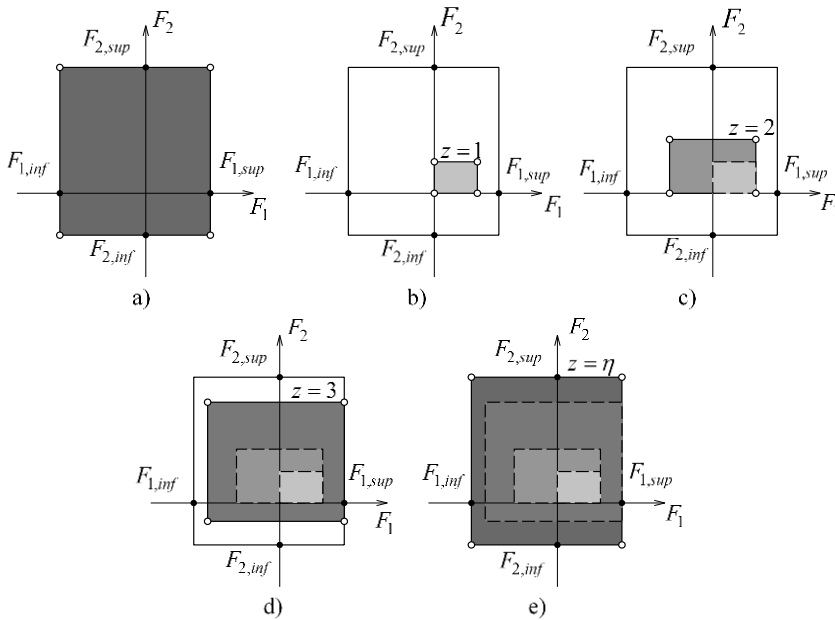


Fig. S2.1. Typical scanning procedure: a) variation locus of load F_{inf} , F_{sup} ; b) 1st scanning stage; c) 2nd scanning stage; d) 3rd scanning stage; e) η -th scanning stage (returning to the stage “a” – full load locus)

Integration of scanning procedures into the analysis problem is based on a substitution of variables in the analysis problem (S1.1)–(S1.3): $\mathbf{S}_r = \mathbf{S}_r^z = \mathbf{S}_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta\mathbf{S}_r^z$, where $\Delta\mathbf{S}_r^z$ is increment of residual forces \mathbf{S}_r at the end of each scanning stage \mathbf{F}_j^z ($z \in Z$, $j \in J^z$) (increment $\Delta\mathbf{S}_r^z$ is caused by load change from \mathbf{F}_j^{z-1} to \mathbf{F}_j^z). Further in the paper \mathbf{S}_r^z will be noted $\mathbf{S}_{r\Sigma}^z$ ($\mathbf{S}_r^z = \mathbf{S}_{r\Sigma}^z$) to emphasize the summation procedure. Meanwhile $\mathbf{S}_{r\Sigma}^{z-1}$ is sum of increments of residual forces obtained in earlier stages for the beginning of z -th stage:

$$\mathbf{S}_{r\Sigma}^{z-1} = \Delta\mathbf{S}_r^0 + \Delta\mathbf{S}_r^1 + \dots + \Delta\mathbf{S}_r^{z-1} = \sum_z \Delta\mathbf{S}_r^{z-1}. \quad (\text{S2.1})$$

When $z=1$, initial increment $\Delta\mathbf{S}_r^0 = \mathbf{0}$ and $\mathbf{S}_{r\Sigma}^0 = \mathbf{0}$. Then for each scanning stage z ($z \in Z$) using elastic forces $\mathbf{S}_{ej}^z = \alpha \mathbf{F}_j^z$, following analysis problem is solved:

$$\text{find} \quad \min \left(\mathcal{F}' \left(\mathbf{S}_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta\mathbf{S}_r^z \right) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{S}_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta\mathbf{S}_r^z \right)^T \mathbf{D} \left(\mathbf{S}_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta\mathbf{S}_r^z \right) \right) = a^{z*}, \quad (\text{S2.2})$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{A} \Delta\mathbf{S}_r^z = \mathbf{0}, \quad (\text{S2.3})$$

$$\boldsymbol{\varphi}_j^z = \mathbf{C} - \mathbf{f}_j(\mathbf{S}_{r\Sigma}^{z-1} + \mathbf{S}_{ej}^z + \Delta\mathbf{S}_r^z) \geq \mathbf{0}, \quad j \in J^z, \quad z \in Z. \quad (\text{S2.4})$$

Optimal solution of problem (S2.2)–(S2.4) is residual displacements increments vector $\Delta\mathbf{S}_r^{z*}$. Considering eq. (S2.1), it becomes clear that components $\Delta\mathbf{S}_r^1, \Delta\mathbf{S}_r^2 + \dots + \Delta\mathbf{S}_r^{z-1}$ are optimal solutions of separate stages $\Delta\mathbf{S}_r^{1*}, \Delta\mathbf{S}_r^{2*} + \dots + \Delta\mathbf{S}_r^{(z-1)*}$. Solution of the dual problem to (S2.2)–(S2.4) consists of $\boldsymbol{\theta}_p^{z*}$ and \mathbf{u}_r^{z*} . Applying eq. (S1.4) and (S1.5) it is not difficult to check the relation between obtained solutions: $\mathbf{S}_r^{z*} = \mathbf{S}_{r\Sigma}^{z-1} + \Delta\mathbf{S}_r^{z*} = \bar{\mathbf{G}}\boldsymbol{\theta}_p^{z*}$ and $\mathbf{u}_r^{z*} = \bar{\mathbf{H}}\boldsymbol{\theta}_p^{z*}$.

Scanning procedure is illustrated on a known geometry framed structure (Fig. S2.2).

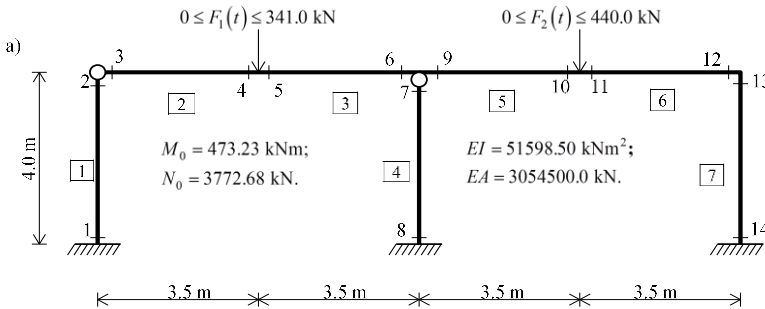


Fig. S2.2. A discrete model of a structure (element numbers are marked in rectangles): a) calculation scheme, b) scheme of possible nodal displacements directions (DOF $m = 17$)

Analyzing results of optimal solutions of both variants showed, that second variant frame volume is larger by 8.05 % and optimal limit moments M_{01}^* , M_{02}^* are larger by 26.12 % and 17.06 % respectively, and M_{03}^* is smaller by 2.05 %.

Another numerical example of optimization problem of reinforced concrete structures was performed by applying the modified mathematical model (S3.1)–(S3.2). Where yielding conditions are derived according to reinforced concrete cross-section strength locus. Design of reinforcement of rectangular cross-section (Fig. S3.2, based on a LST EN 1993-1-1) is implemented into an algorithm of optimization problem. This section material is prepared during internship at the University of Zielona Gora, Poland.

$$\text{Find} \quad \min \mathbf{L}^T \mathbf{S}_0, \quad (\text{S3.1})$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{A} \mathbf{S}_r = \mathbf{0}, \quad (\text{S3.2})$$

$$\boldsymbol{\varphi}_j = \mathbf{I} \mathbf{S}_0 - \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{S}_{ej}(\mathbf{S}_0) + \mathbf{S}_r) - \mathbf{B} \geq \mathbf{0}, \quad (\text{S3.3})$$

$$\boldsymbol{\lambda}_j^T [\mathbf{I} \mathbf{S}_0 - \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{S}_{ej}(\mathbf{S}_0) + \mathbf{S}_r) - \mathbf{B}] = 0, \quad (\text{S3.4})$$

$$\boldsymbol{\lambda}_j \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\lambda}_j = [\lambda_{1j} \lambda_{2j} \dots \lambda_{\zeta j}]^T, \text{ for all } j \in J, \quad (\text{S3.5})$$

$$\mathbf{S}_0 \geq \mathbf{S}_0^-, \quad (\text{S3.6})$$

$$\mathbf{S}_0 \leq \mathbf{S}_0^+. \quad (\text{S3.7})$$

Here, $\mathbf{L} = (L_k)$, $k \in K$, $\mathbf{S}_0 = (S_{0k})$, $k \in K$, L_k is the sum of the lengths of the k elements with the same limiting generalized force, $k \in K$, S_{0k} is the limiting generalized force of the k -th element, \mathbf{S}_0 is a vector of the limiting generalized forces, \mathbf{S}_r is a vector of residual generalized forces, \mathbf{S}_{ej} is a vector of elastic generalized forces at load locus apex $j \in J$, $\boldsymbol{\lambda}_j$ is a vector of plastic multipliers, $j \in J$, \mathbf{u}_r is a vector of residual displacements.

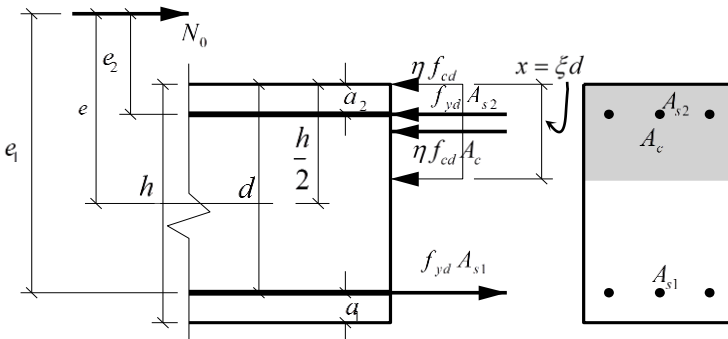


Fig. S3.2. Reinforcement design of a rectangular eccentrically compressed cross-section (doubly symmetrically reinforced, in case of large eccentricity)

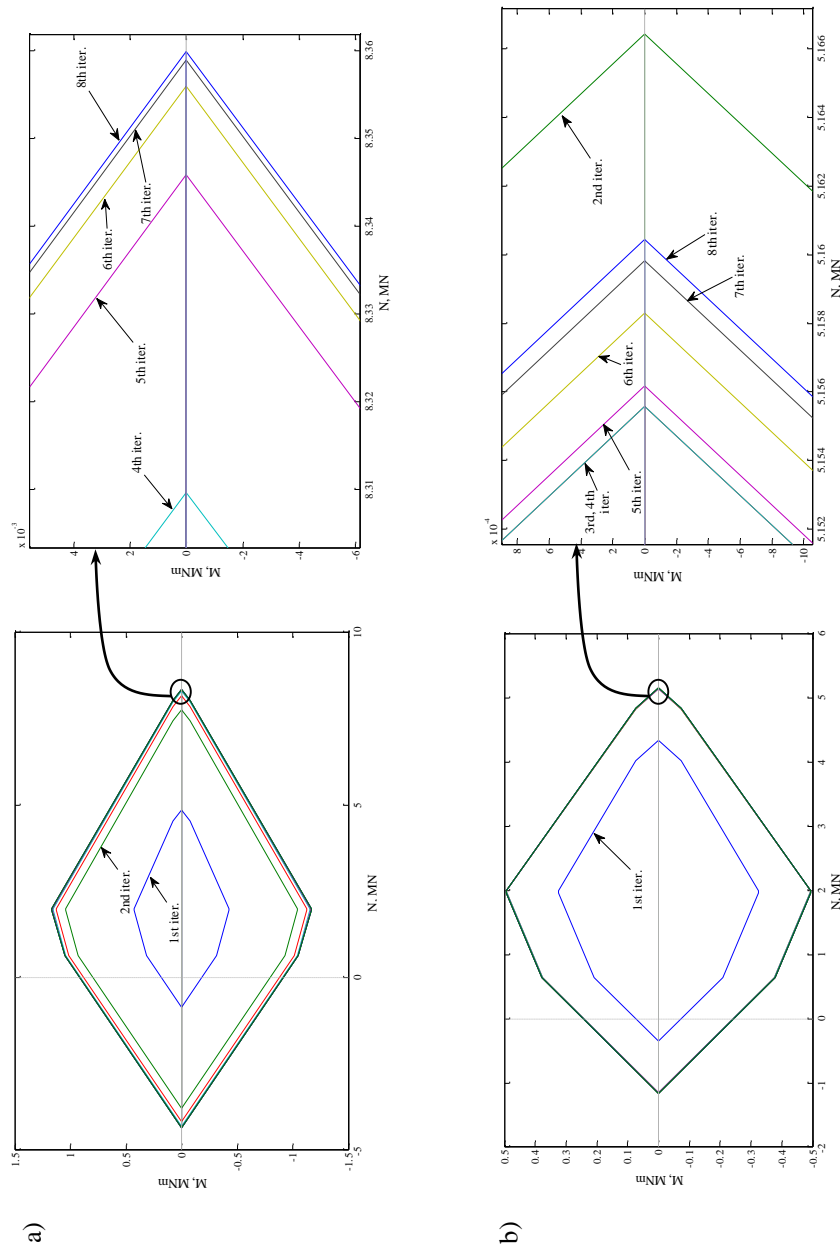


Fig. S3.3. Iterative changes of the strength loci of reinforced concrete cross-section with limit bending moment a) M_{01} b) M_{02}

In mathematical model (S3.1)–(S3.7) $\Phi = \text{diag}\Phi_i$ is a quasi-diagonal matrix of the linear yielding conditions, where Φ_i is the matrix of coefficients of the linear yielding conditions of the i -th section, $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \ \mathbf{B}_2 \ \dots \ \mathbf{B}_i]^T$ is a vector of the free units of linear yielding conditions. See Table 3.6 for the matrix Φ_i and vector \mathbf{B} of free units and linear yielding conditions for the i -th section. Iterative changes of strength loci of cross-sections with M_{01} and M_{02} are illustrated in Fig. S3.3.

Note. Here $\mathbf{D}(I_{tr}, A_{tr}, E_{comp})$ is a flexibility matrix of the *transformed* cross-section. The transformation of the cross-section needs to be performed because RC cross-sections are composed of two materials. Their geometrical characteristics, such as moment of inertia I_{tr} and area of cross-section A_{tr} , can be determined using methods described by Beardmore (Beardmore 2011). The elastic modulus of composite material E_{comp} is determined according to the rule of mixtures (DoITPoMS 2004).

4. Results control of optimization at shakedown

Numerical experiments carried out in this thesis are based on and integration of plasticity theory and computational methods. Therefore theoretical and numerical experiments parts are distinguished.

Computers and information technology makes it easier to solve analysis and optimization problems of complex constructions (Blaževičius *et al.* 2014; Jankovski, Atkočiūnas 2010). In order to avoid dangers raised by computerization when using industrial software applications, it is important to understand, on what mathematical models their working principle is based (Narvydas 2011). Easy solution of a problem results to temptation to non-critically evaluate the results obtained, to ignore parts of analysis which requires deep engineering knowledge and experience (i.e. knowledge and experience of problem formulation, understanding the essence of applied assumptions, choosing the correct solving method and control of the results for very responsible structures) (LST EN 1993-1-1:2005+AC:2006 2010). This paper presents a technique, based on a Rosen's gradient projection method (Bazaraa *et al.* 2006; Rosen 1961, 1960), to check if optimal solution of circular plate obtained by using MATLAB software satisfies plate shakedown conditions (Atkočiūnas 2012; Rosen 1961). The technique presented can be applied to control the results of optimization problems of other various constructions. In this case technique is illustrated by numerical example of a symmetrical bended circular plate.

Results of plate optimization, using MATLAB, were obtained after objective function converges. In this case plate optimization problem is solved iteratively, using MATLAB solver *fmincon* with the following parameters.

```
options=optimset('Algorithm','sqp','TolCon',1e-12,'TolFun',
1e-12,'TolX',1e-12,'MaxFunEvals',1e6,'MaxIter',1e6);
```

Control of optimization results is based on optimality conditions of Rosen's gradients projection algorithm (S4.1)–(S4.2):

$$\left\{ \mathbf{I} - \nabla \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T(\mathbf{x}^{opt}) [\nabla \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}^{opt}) \nabla \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T(\mathbf{x}^{opt})]^{-1} \nabla \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}^{opt}) \right\} \nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}^{opt}) = \mathbf{0}, \quad (\text{S4.1})$$

$$\left[\nabla \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}^{opt}) \nabla \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T(\mathbf{x}^{opt}) \right]^{-1} \nabla \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}^{opt}) \nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}^{opt}) \geq \mathbf{0}. \quad (\text{S4.2})$$

Proposed technique opens a new possibilities for the shakedown theory in structural optimization, by using modern computational methods, which are disclosed in this thesis. Suggested methods and techniques encourages and accelerates the integration of building structures optimization results in to the design practice.

General conclusions

1. Uncertainty of loading history prevents unambiguous determination of plastic structure's stress strain state's: internal forces, deformations, displacements. In such case the task of structural mechanics should be solved by determining variation bounds of these variables.
2. Considering the analysis of shakedown researches and results of numerical experiments, determined, that if during shakedown process any cross-sections of the structure experiences unloading, then the principle of total potential energy minimum cannot be applied directly in order to determine residual displacements at the state of shakedown.
3. By performing numerical experiment of the scanning method determined, that if a correct scanning strategy is chosen the scanning method allows to capture the unloading fact of the cross-sections. The reliability of residual displacements variation boundaries determination can be increased by increasing number of scanning strategies.
4. Analysis of scanning results, proved, that according to Melan's shakedown theorem distribution of residual forces \mathbf{S}_r^* is unique at the final stage. On the other hand residual displacements \mathbf{u}_r^* and plastic deformations $\boldsymbol{\theta}_p^*$ aren't necessarily unique (they might depend on a history of loading – interpretation of Melan's theorem).
5. The scanning method within load variation locus allows to distinguish limits of subsets, which defines one or another character of shakedown (i.e. the existence of nonunloaded cross-sections during whole process of shakedown).
6. Numerical experiments proved, that residual displacements determined by using scanning methodology needs to be applied to serviceability conditions in mathematical models of optimization problems. In such case the volume, of the structure examined, was obtained smaller by 8,05 %.
7. The thesis proves, that mathematical model of optimization at shakedown problem with modified yielding conditions (according critical points of reinforced

concrete cross-section strength locus) can be successfully applied for optimal design of required reinforcement (according to Eurocode 2 requirements for eccentrically compressed doubly reinforced rectangular cross-sections). Numerical experiments of optimization of reinforced concrete framed structure at shakedown, showed that optimal design of reinforcement is symmetrical.

8. There is no need to create an individual specific algorithm for determination of accumulated plastic deformations when their determination and classic problem of optimization at shakedown are joined into unite methodic system
9. In this thesis a physical validation methodology for the “black box” optimal shakedown design problem solution in the aspect of Melan theorem (statics) and residual deformation compatibility (kinematics) is created. For that purpose Rosen gradient projection method is used to control the particular parts of the primary optimization prob-lem solution.

Priedai¹

A priedas. Rėmo bendrosios analizės programinis kodas

B priedas. Skenavimo procedūros programiniai kodai

C priedas. Plieninio rėmo optimizavimo programinis kodas

D priedas. Gelžbetoninio rėmo optimizavimo programinis kodas

E priedas. Optimizavimo rezultatų kontrolės pagalbiniai duomenys

F priedas. Bendraautorių sutikimai teikti publikacijose skelbtą
mokslinę medžiagą daktaro disertacijoje

G priedas. Autoriaus mokslinių publikacijų disertacijos tema
kopijos

¹ Priedai pateikiami pridėtoje kompaktinėje plokštelėje

Liudas LIEPA

MELANO PRISITAIKOMUMO TEOREMOS
INTERPRETACIJA OPTIMIZUOJANT
RĖMINES KONSTRUKCIJAS

Daktaro disertacija

Technologijos mokslai,
Statybos inžinerija (02T)

MELAN SHAKEDOWN THEOREM
INTERPRETATION FOR OPTIMIZATION
OF FRAMED STRUCTURES

Doctoral Dissertation

Technological Sciences,
Civil Engineering (02T)

2017 02 15. 10,5 sp. I. Tiražas 20 egz.
Vilniaus Gedimino technikos universiteto
leidykla „Technika“,
Saulėtekio al. 11, 10223 Vilnius,
<http://leidykla.vgtu.lt>
Spausdino BĮ UAB „Baltijos kopija“
Kareivių g. 13B, 09109 Vilnius